כיתה י"ב · 5 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 2 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

🔄 הצגה קוטבית ומשפט דה־מואבר

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון, 5 יח"ל, כיתה י"ב (שאלון 35572): "מרוכבים: הגדרה, הצגה אלגברית, שוויון, ארבע הפעולות. הצגה גרפית במישור גאוס... הצגה קוטבית (טריגונומטרית)... משפט דה-מואבר. שורשי יחידה, שורשים מסדר n". בבחינה 35572, בפרק הראשון: "הנדסה אנליטית, וקטורים (כולל טריגונומטריה במרחב), מספרים מרוכבים". הנושא לא נלמד ב-4 יח"ל.

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- לעבור בין הצגה אלגברית להצגה קוטבית $z = r\cdot\text{cis}\,\theta$.
- לכפול ולחלק בהצגה קוטבית ולהבין את המשמעות: מתיחה וסיבוב.
- להשתמש במשפט דה־מואבר לחישוב חזקות ולמציאת שורשים מסדר n.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. מהו $|1 + i|$? ומהי הזווית בין הקטע מהראשית ל־$(1, 1)$ לבין הכיוון החיובי של ציר x?
2. חשבו: $(1 + i)^2$. מה קרה לזווית?
3. כמה פתרונות ממשיים יש ל־$x^3 = 8$? כמה פתרונות יש לדעתכם במרוכבים?

למורה: בשאלה 1 מצפים ל־$\sqrt{2}$ ול־$45°$. בשאלה 2 התוצאה $2i$, בזווית $90°$: הזווית הוכפלה. זה הרמז למשפט דה־מואבר.

🔑 מושגי מפתח

$\text{cis}\,\theta$

קיצור של $\cos\theta + i\cdot\sin\theta$.

הצגה קוטבית

$z = r\cdot\text{cis}\,\theta$, כאשר $r = |z|$ ו־θ היא הזווית.

ארגומנט θ

הזווית בין הכיוון החיובי של הציר הממשי לבין הקטע מהראשית אל z. נהוג $0° \le \theta < 360°$.

משפט דה־מואבר

$(r\cdot\text{cis}\,\theta)^n = r^n\cdot\text{cis}(n\theta)$.

שורש מסדר n

כל פתרון של $z^n = w$. ל־$w \neq 0$ יש בדיוק n שורשים.

שורשי יחידה

הפתרונות של $z^n = 1$.

📖 הסבר למורה

כל מספר $z \neq 0$ נקבע על ידי המרחק שלו מהראשית r ועל ידי הזווית θ. מתקיים $a = r\cdot\cos\theta$ ו־$b = r\cdot\sin\theta$, ולכן $z = r\cdot\text{cis}\,\theta$. בבגרות כותבים זוויות במעלות.

כדי למצוא את θ מסמנים קודם את הנקודה ומזהים את הרביע. אחר כך מוצאים זווית עזר מ־$\tan\alpha = |b/a|$. טעות נפוצה: ל־$-1 - i$ לכתוב $45°$ במקום $225°$.

כפל: $r_1\cdot\text{cis}\,\theta_1 \cdot r_2\cdot\text{cis}\,\theta_2 = r_1r_2\cdot\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$. חילוק: מחלקים את הערכים המוחלטים ומחסרים זוויות. גאומטרית, כפל ב־$r\cdot\text{cis}\,\theta$ מותח פי r ומסובב ב־θ נגד כיוון השעון. כפל ב־i הוא סיבוב ב־$90°$.

משפט דה־מואבר נובע מכפל חוזר: $(r\cdot\text{cis}\,\theta)^n = r^n\cdot\text{cis}(n\theta)$. כך מחשבים חזקה גבוהה בלי לפתוח סוגריים. בסוף מורידים כפולות של $360°$ מהזווית.

שורשים: אם $w = R\cdot\text{cis}\,\alpha$, הפתרונות של $z^n = w$ הם $z = \sqrt[n]{R}\cdot\text{cis}((\alpha + 360°\cdot k)/n)$, עבור $k = 0, 1, \ldots, n-1$. כולם על מעגל ברדיוס $\sqrt[n]{R}$, במרווחים של $360°/n$, ולכן הם קודקודים של מצולע משוכלל. טעות נפוצה: למצוא שורש אחד בלבד.

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. כתבו בהצגה קוטבית: $z = -2 + 2\sqrt{3}\cdot i$.

1. $r = \sqrt{(4 + 12)} = 4$.
2. הנקודה $(-2, 2\sqrt{3})$ ברביע השני.
3. זווית עזר: $\tan\alpha = 2\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$, ולכן $\alpha = 60°$.
4. $\theta = 180° - 60° = 120°$.

תשובה: $z = 4\cdot\text{cis}\,120°$

דוגמה 2. חשבו: $(1 - \sqrt{3}\cdot i)^6$.

1. $r = \sqrt{(1 + 3)} = 2$, הנקודה ברביע הרביעי, זווית עזר $60°$, ולכן $\theta = 300°$.
2. דה־מואבר: $2^6\cdot\text{cis}(6\cdot 300°) = 64\cdot\text{cis}\,1800°$.

3. $1800° = 5 \cdot 360°$, ולכן $\text{cis}\ 1800° = \text{cis}\ 0° = 1$.

תשובה: 64

דוגמה 3. פתרו: $z^4 = -16$ ותארו את הפתרונות במישור גאוס.

1. $-16 = 16 \cdot \text{cis}\ 180°$.
2. $z = \sqrt[4]{16} \cdot \text{cis}((180° + 360° \cdot k)/4) = 2 \cdot \text{cis}(45° + 90° \cdot k)$.
3. $k = 0, 1, 2, 3$: הזוויות $45°, 135°, 225°, 315°$.
4. $2 \cdot \text{cis}\ 45° = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$, ובאותו אופן שאר הנקודות.
5. ארבע נקודות על מעגל ברדיוס 2: קודקודי ריבוע.

תשובה: $z = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2} \cdot i$ (ארבעה פתרונות, קודקודי ריבוע)

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה: שאלות הכניסה (5 דקות).
2. בניית ההצגה הקוטבית מהשרטוט: $a = r \cdot \cos\theta$, $b = r \cdot \sin\theta$.
3. דוגמה 1 על הלוח, ואז כל זוג ממיר מספר אחד מכל רביע.
4. גילוי: מכפילים $2 \cdot \text{cis}\ 30°$ ב־$3 \cdot \text{cis}\ 60°$ אלגברית ובודקים מה קרה ל־r ול־θ.
5. דוגמה 2 (דה־מואבר) ודוגמה 3 (שורשים) בהנחיית המורה.
6. דף עבודה: שאלות 1 עד 5, מתקדמים לחלק הכוכב.
7. סיכום ושאלות יציאה.

💡 הערות למורה

הטעות הנפוצה ביותר היא זווית ברביע הלא נכון: דרשו שרטוט לפני כל חישוב. בשורשים, בקשו לבדוק שמספר הפתרונות שווה ל־n ושהמרווח ביניהם $360°/n$. לתלמידים מתקשים תנו את הדף המותאם. למתקדמים: סכום שורשי היחידה ומשמעותו.

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. מהי ההצגה הקוטבית של $3i$?

- $3 \cdot \text{cis}\ 0°$
- $3 \cdot \text{cis}\ 90°$
- $3 \cdot \text{cis}\ 180°$
- $i \cdot \text{cis}\ 3°$

2. מהו $3 \cdot \text{cis}\ 40° \cdot 2 \cdot \text{cis}\ 50°$?

5·cis 90° | 6·cis 2000° | 6i | 6

3. מהו $(\text{cis } 30°)^{12}$?

12 | −1 | i | 1

4. כמה פתרונות יש ל־$z^5 = 1$, ואיזו צורה הם יוצרים?

5, מחומש משוכלל | 1, נקודה | 5, ישר | 2, קטע

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. כתבו בהצגה קוטבית: $1 - i$.
2. חשבו בעזרת משפט דה־מואבר: $(1 - i)^4$.

תשובות: 1. $r = \sqrt{2}$, רביע רביעי, $\theta = 315°$: $\sqrt{2}\cdot\text{cis } 315°$. 2. $-4 = 4\cdot\text{cis } 180°$ ו־$(\sqrt{2})^4\cdot\text{cis } 1260°$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה
- משרד החינוך: נושאים שלא ייבחנו בבגרות במתמטיקה, מועדי תשפ"ז (PDF)

מחוון: הצגה קוטבית ומשפט דה־מואבר

1. תשובה: $-\sqrt{3} + i$

פתרון:

$\cos 150° = -\sqrt{3}/2$, $\sin 150° = 1/2$.

$2 \cdot (-\sqrt{3}/2 + i/2) = -\sqrt{3} + i$.

2. תשובה: $5\sqrt{2} \cdot \text{cis } 225°$

פתרון:

$r = \sqrt{(25 + 25)} = 5\sqrt{2}$.

הנקודה $(-5, -5)$ ברביע השלישי, זווית עזר $45°$.

$\theta = 180° + 45° = 225°$.

3. תשובה: $12 \cdot \text{cis } 140°$, $(3\sqrt{3}/2) \cdot i + 3/2 = 3 \cdot \text{cis } 60°$

פתרון:

$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \text{cis } 140°$.

$z_1 / z_2 = 3 \cdot \text{cis } 60°$.

$3 \cdot (1/2 + (\sqrt{3}/2) \cdot i) = 3/2 + (3\sqrt{3}/2) \cdot i$.

4. תשובה: $-512i$

פתרון:

$r = \sqrt{(3 + 1)} = 2$, רביע ראשון, $\tan \theta = 1/\sqrt{3}$, ולכן $\theta = 30°$.

$2^9 \cdot \text{cis } 270° = 512 \cdot \text{cis } 270°$.

$\text{cis } 270° = -i$.

5. תשובה: $3\sqrt{3}/2 + (3/2) \cdot i$, $-3\sqrt{3}/2 + (3/2) \cdot i$, $-3i$: משולש שווה צלעות

פתרון:

$27i = 27 \cdot \text{cis } 90°$.

$z = 3 \cdot \text{cis}((90° + 360° \cdot k)/3) = 3 \cdot \text{cis}(30° + 120° \cdot k)$.

$k = 0$: $3 \cdot \text{cis } 30° = 3\sqrt{3}/2 + (3/2) \cdot i$.

$k = 1$: $3 \cdot \text{cis } 150° = -3\sqrt{3}/2 + (3/2) \cdot i$.

$k = 2$: $3 \cdot \text{cis } 270° = -3i$.

שלוש נקודות על מעגל ברדיוס 3: משולש שווה צלעות.

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: $-4 + 8i$

פתרון:

סיבוב ב־$90°$ ומתיחה פי 2 הם כפל ב־$2i = 2\cdot\mathrm{cis}\ 90°$.

$(4 + 2i)\cdot 2i = 8i + 4i^2 = -4 + 8i$.

7. תשובה: 6 שורשים, קודקודי משושה, סכומם 0

פתרון:

$1 = \mathrm{cis}\ 0°$, ולכן $z = \mathrm{cis}(60°\cdot k)$, $k = 0, \ldots, 5$.

$1,\ 1/2 + (\sqrt{3}/2)\cdot i,\ -1/2 + (\sqrt{3}/2)\cdot i,\ -1,\ -1/2 - (\sqrt{3}/2)\cdot i,\ 1/2 - (\sqrt{3}/2)\cdot i$.

הם באים בזוגות נגדיים: 1 ו־-1, וכן הלאה, ולכן הסכום 0.

גאומטרית: קודקודי משושה משוכלל שמרכזו בראשית.

8. תשובה: $n = 8$, $(1 + i)^8 = 16$

פתרון:

$1 + i = \sqrt{2}\cdot\mathrm{cis}\ 45°$.

$(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n\cdot\mathrm{cis}(45°\cdot n)$.

ממשי חיובי כאשר $45°\cdot n$ כפולה של $360°$: $n = 8$.

$(\sqrt{2})^8 = 16$.

כרטיס יציאה: 1. $r = \sqrt{2}$, רביע רביעי, $\theta = 315°$: $\sqrt{2}\cdot\mathrm{cis}\ 315°$. 2. $-4 = 4\cdot\mathrm{cis}\ 180° = (\sqrt{2})^4\cdot\mathrm{cis}\ 1260°$.

נוצר בבינה מלאכותית