כיתה י"ב · 5 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 1 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

🧮 המספר המרוכב בהצגה אלגברית

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון, 5 יח"ל, כיתה י"ב (שאלון 35572): "מרוכבים: הגדרה, הצגה אלגברית, שוויון, ארבע הפעולות. הצגה גרפית במישור גאוס... הצגה קוטבית (טריגונומטרית)... משפט דה-מואבר. שורשי יחידה, שורשים מסדר n". בבחינה 35572, בפרק הראשון: "הנדסה אנליטית, וקטורים (כולל טריגונומטריה במרחב), מספרים מרוכבים". הנושא לא נלמד ב-4 יח"ל.

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- לבצע את ארבע פעולות החשבון במספרים מרוכבים בהצגה $z = a + bi$.
- לסמן מספר מרוכב במישור גאוס ולחשב צמוד וערך מוחלט.
- לפתור משוואה ריבועית עם דיסקרימיננטה שלילית ולמצוא שורש ריבועי של מספר מרוכב.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. האם יש מספר ממשי שריבועו -9?
2. פתרו: $x^2 + 4 = 0$. מה קורה בנוסחת השורשים?
3. חשבו: $(3 - 2x)\cdot(3 + 2x)$.

למורה: שאלות 1 ו־2 מראות שבמספרים הממשיים אין פתרון. שאלה 3 מכינה את הכפל בצמוד: חפשו מי מזהה את $9 - 4x^2$ כהפרש ריבועים.

🔑 מושגי מפתח

היחידה המדומה i

מספר שמקיים $i^2 = -1$.

מספר מרוכב

מספר מהצורה $z = a + bi$, כאשר a ו־b ממשיים.

חלק ממשי וחלק מדומה

ב־$z = a + bi$: $\text{Re } z = a$ ו־$\text{Im } z = b$.

מספר צמוד

הצמוד של $z = a + bi$ הוא $\bar{z} = a - bi$.

ערך מוחלט

$|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$: המרחק של הנקודה מראשית הצירים.

מישור גאוס

מישור שבו $z = a + bi$ הוא הנקודה (a, b). ציר ממשי וציר מדומה.

📖 הסבר למורה

מוסיפים למספרים הממשיים מספר חדש i שמקיים $i^2 = -1$. כל מספר מרוכב נכתב $a + bi$. שני מספרים מרוכבים שווים רק אם החלקים הממשיים שווים וגם החלקים המדומים שווים.

חיבור וחיסור: מחברים ממשי עם ממשי ומדומה עם מדומה. כפל: פותחים סוגריים כמו בביטוי אלגברי ומחליפים i^2 ב־-1. החזקות של i חוזרות כל 4: $1, i, -1, -i$.

חילוק: כופלים את המונה ואת המכנה בצמוד של המכנה. כך המכנה נעשה ממשי, כי $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. טעות נפוצה: לכפול רק את המכנה.

במישור גאוס, $z = a + bi$ הוא הנקודה (a, b) או וקטור מהראשית. חיבור מספרים הוא חיבור וקטורים (כלל המקבילית). $|z_1 - z_2|$ הוא המרחק בין שתי הנקודות. הצמוד הוא שיקוף בציר הממשי.

משוואה ריבועית עם $\Delta < 0$ פותרים בנוסחה הרגילה, עם $\sqrt{(-36)} = 6i$. שורש ריבועי של מספר מרוכב w מוצאים מ־$(x + yi)^2 = w$: משווים חלק ממשי וחלק מדומה. המשוואה $|z - z_0| = r$ מתארת מעגל שמרכזו z_0 ורדיוסו r.

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. חשבו: $(7 + i)/(1 - 2i)$.

1. כופלים מונה ומכנה בצמוד $1 + 2i$.
2. מונה: $(7 + i)(1 + 2i) = 7 + 14i + i + 2i^2 = 5 + 15i$.
3. מכנה: $(1 - 2i)(1 + 2i) = 1 + 4 = 5$.
4. $(5 + 15i)/5 = 1 + 3i$.

תשובה: $1 + 3i$

דוגמה 2. פתרו: $z^2 - 4z + 13 = 0$.

1. $\Delta = 16 - 52 = -36$.
2. $\sqrt{(-36)} = 6i$.
3. $z = (4 \pm 6i)/2$.

4. $z = 2 + 3i$ או $z = 2 - 3i$: שני פתרונות צמודים.

תשובה: $z = 2 \pm 3i$

דוגמה 3. מצאו את השורשים הריבועיים של $-5 + 12i$.

1. מחפשים x, y ממשיים עם $(x + yi)^2 = -5 + 12i$.

2. $x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i$.

3. משווים: $x^2 - y^2 = -5$ וגם $2xy = 12$, כלומר $y = 6/x$.

4. מציבים: $x^2 - 36/x^2 = -5$, ולכן $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$.

5. $x^2 = 4$ (הפתרון $x^2 = -9$ נפסל כי x ממשי), $x = \pm 2$, $y = \pm 3$.

תשובה: $2 + 3i$ ו־$-2 - 3i$

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה: שאלות הכניסה על הלוח (5 דקות).
2. הגדרת i וחישוב i^2, i^3, i^4, i^5 יחד.
3. חיבור וכפל בזוגות, ואז דוגמה 1 (חילוק) בהנחיית המורה.
4. סימון $3 + 2i$, $-1 + 4i$ וסכומם במישור גאוס: רואים את כלל המקבילית.
5. דוגמאות 2 ו־3 על הלוח.
6. דף עבודה: שאלות 1 עד 5, מתקדמים ממשיכים לחלק הכוכב.
7. סיכום ושאלות יציאה.

💡 הערות למורה

טעויות נפוצות: $i^2 = 1$, וכפל של המכנה בלבד בצמוד. בשורש ריבועי, הזכירו ש־x ו־y ממשיים ולכן $x^2 = -9$ נפסל. לתלמידים מתקשים תנו את הדף המותאם עם תיבת הנוסחאות. למתקדמים: מקומות גאומטריים כמו $|z + i| = |z - 1|$.

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. מהו i^7?

- $-i$
- i
- 1
- -1

2. מהו הצמוד של $2 - 5i$?

$-5 + 2i$ | $5 + 2i$ | $-5 - 2i$ | $2 - 5i$

3. מהו $|6 - 8i|$?

14 | 2 | 10 | 100

4. מה מתארת המשוואה $|z - 2i| = 3$ במישור גאוס?

ישר $y = 3$ | מעגל שמרכזו $(2, 0)$ ורדיוסו 3 | מעגל שמרכזו $(0, 3)$ ורדיוסו 2

מעגל שמרכזו $(0, 2)$ ורדיוסו 3

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. חשבו: $(3 - i)/(1 + i)$.

2. פתרו: $z^2 + 2z + 5 = 0$.

תשובות: 1. $(3 - i)(1 - i)/2 = (2 - 4i)/2 = 1 - 2i$. 2. $\Delta = -16$, $z = (-2 \pm 4i)/2 = -1 \pm 2i$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה
- משרד החינוך: נושאים שלא ייבחנו בבגרות במתמטיקה, מועדי תשפ"ז (PDF)

מחוון: המספר המרוכב בהצגה אלגברית

1. תשובה: $2 + 3i$

פתרון:

חלק ממשי: $5 - 2 - 1 = 2$.

חלק מדומה: $-3 + 7 - 1 = 3$.

התוצאה: $2 + 3i$.

2. תשובה: 25

פתרון:

$16 - 12i + 12i - 9i^2$

$16 + 9 = 25$

זו מכפלת מספר בצמוד שלו: $a^2 + b^2$, ולכן אין חלק מדומה.

3. תשובה: $3 + 2i$

פתרון:

כופלים בצמוד $2 + i$.

מונה: $(8 + i)(2 + i) = 16 + 8i + 2i + i^2 = 15 + 10i$.

מכנה: $4 + 1 = 5$.

$(15 + 10i)/5 = 3 + 2i$.

4. תשובה: $x = 4$, $y = 3$

פתרון:

פותחים: $x + xi + yi + yi^2 = (x - y) + (x + y)i$.

שוויון מרוכבים: $x - y = 1$ וגם $x + y = 7$.

מחברים: $2x = 8$, $x = 4$, ולכן $y = 3$.

5. תשובה: רביע שני, $\bar{z} = -3 - 4i$, $|z| = 5$

פתרון:

הנקודה $(-3, 4)$ נמצאת ברביע השני.

שיקוף בציר הממשי: $\bar{z} = -3 - 4i$.

$|z| = \sqrt{(9 + 16)} = 5$.

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: $z = -3 \pm 5i$

פתרון:

$\Delta = 36 - 136 = -100$.

$\sqrt{(-100)} = 10i$.

$z = (-6 \pm 10i)/2 = -3 \pm 5i$.

7. תשובה: $4 - i$ ו־$-4 + i$

פתרון:

$(x + yi)^2 = 15 - 8i$, ולכן $x^2 - y^2 = 15$ וגם $2xy = -8$.

$y = -4/x$, ומציבים: $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$.

$x^2 = 16$ ($x^2 = -1$ נפסל), $x = \pm 4$.

$x = 4$ נותן $y = -1$, $x = -4$ נותן $y = 1$.

בדיקה: $(4 - i)^2 = 16 - 8i - 1 = 15 - 8i$.

8. תשובה: הישר $y = -x$

פתרון:

$|(x - 1) + yi| = |x + (y + 1)i|$.

מעלים בריבוע: $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$.

$-2x + 1 = 2y + 1$, ולכן $y = -x$.

זהו האנך האמצעי לקטע שבין הנקודות $(1, 0)$ ו־$(0, -1)$.

כרטיס יציאה: 1. $(3 - i)(1 - i)/2 = (2 - 4i)/2 = 1 - 2i$. 2. $\Delta = -16$, $z = (-2 \pm 4i)/2 = -1 \pm 2i$.