כיתה י"ב · 5–4 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 2 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

📐 אינטגרל מסוים ושטחים עם e^x ו־$1/x$

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון, כיתה י"ב: 4 יח"ל (שאלון 35472): "חשבון אינטגרלי של פונקציה מעריכית ופונקציה שהקדומה שלה היא לוגריתמית... חישובי שטחים בעזרת אינטגרל מסוים". 5 יח"ל (שאלון 35572): "חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות. האינטגרל כהצטברות שטח". שימו לב: לפי המיקוד לבגרות תשפ"ז, "מציאת פונקציה קדומה על פי הנגזרת ונקודה על גרף הפונקציה" לא תיבחן בשאלון 35472.

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- לחשב אינטגרל מסוים שתוצאתו כוללת e או ln, מדויק ובקירוב.
- לחשב שטח בין גרף לציר x, גם כשחלק מהשטח מתחת לציר.
- לחשב שטח בין שני גרפים ולהבין את האינטגרל כהצטברות שטח.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. תזכורת מי"א: חשבו $\int_0^2 (3x^2)\,dx$.
2. כמה זה e^0? וכמה זה $\ln 1$? וכמה $\ln e$?
3. השטח בין $y = x - 2$, ציר x, $x = 0$ ו־$x = 2$ הוא 2. למה האינטגרל $\int_0^2 (x-2)\,dx$ יוצא -2?

למורה: שאלה 2 היא הבסיס לכל ההצבות היום. בשאלה 3 חפשו תלמידים שמבינים שאינטגרל של פונקציה שלילית יוצא שלילי, ושהשטח הוא תמיד חיובי.

🔑 מושגי מפתח

אינטגרל מסוים

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, כש־F קדומה של f.

תשובה מדויקת

תשובה עם e או ln, כמו $e^2 - 1$ או $\ln 3$.

קירוב

ערך עשרוני, כמו $e^2 - 1 \approx 6.39$. מעגלים רק בסוף.

נקודת חיתוך

x שבו שני גרפים נפגשים, או שגרף חותך את ציר x. הוא גבול האינטגרציה.

הצטברות שטח

$\int_a^b f(x)\,dx$ סוכם את השטח שהצטבר לאורך הקטע (עם סימן).

📖 הסבר למורה

חישוב אינטגרל מסוים זהה לי"א: מוצאים קדומה ומציבים את הגבולות. עכשיו ההצבות כוללות $e^0 = 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ ו־$e^{(\ln a)} = a$. משאירים תשובה מדויקת, ורק בסוף נותנים קירוב.

שטח בין גרף לציר x: אם הגרף מעל הציר, השטח שווה לאינטגרל. אם הגרף מתחת לציר, האינטגרל שלילי, והשטח הוא הערך המוחלט שלו. אם הגרף חוצה את הציר בתוך הקטע, מוצאים את נקודת החיתוך ומחלקים את השטח לשני חלקים.

שטח בין שני גרפים: מוצאים נקודות חיתוך, קובעים איזה גרף עליון (מציבים נקודה בתוך הקטע), ומחשבים $\int (\text{עליונה} - \text{תחתונה})\,dx$. התשובה חייבת לצאת חיובית. אם יצא שלילי, החלפנו בין העליונה לתחתונה.

האינטגרל כהצטברות: האינטגרל מ־a עד b סוכם את השטח שהצטבר לאורך הקטע, כשחלק מעל הציר נספר בחיוב וחלק מתחתיו בשלילה. ואם יודעים ש־$g' = f$, אז $\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$, גם כשקשה לנחש את הקדומה בעצמנו.

טעויות נפוצות: לחבר אינטגרל שלילי לחיובי בלי ערך מוחלט, לשכוח ש־$\ln 1 = 0$, לעגל באמצע החישוב, ולהציב את הגבול התחתון קודם ($F(a) - F(b)$).

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. חשבו $\int_0^1 e^{(2x)}\,dx$. תנו תשובה מדויקת וקירוב.

1. קדומה: $(1/2)\cdot e^{(2x)}$.
2. מציבים: $(1/2)\cdot e^2 - (1/2)\cdot e^0$.
3. $= (e^2 - 1)/2$
4. קירוב: $(7.389 - 1)/2 \approx 3.19$.

תשובה: $(e^2 - 1)/2 \approx 3.19$

דוגמה 2. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = e^x - 2$, ציר x והישרים $x = 0$ ו־$x = 2$.

1. חיתוך עם ציר x: $e^x = 2$, $x = \ln 2 \approx 0.69$.

2. בקטע $0 \le x \le \ln 2$ הגרף מתחת לציר:

$\int_0^{\ln 2} (2 - e^x)\,dx = [2x - e^x] = (2\cdot\ln 2 - 2) - (0 - 1) = 2\cdot\ln 2 - 1$.

3. בקטע $\ln 2 \le x \le 2$ הגרף מעל הציר: $\int (e^x - 2)\,dx = (e^2 - 4) - (2 - 2\cdot\ln 2) = e^2 - 6 + 2\cdot\ln 2$.

4. מחברים: $e^2 - 7 + 4\cdot\ln 2 \approx 3.16$.

תשובה: $e^2 - 7 + 4\cdot\ln 2 \approx 3.16$

דוגמה 3. גרף הפונקציה $y = 1/x$ והישר $y = 5/2 - x$ נחתכים בשתי נקודות. חשבו את השטח הכלוא ביניהם.

1. חיתוך: $1/x = 5/2 - x$, כלומר $x^2 - 2.5x + 1 = 0$.

2. $x = 1/2$ או $x = 2$.

3. בדיקה ב־$x = 1$: הישר נותן 1.5 והגרף נותן 1, לכן הישר עליון.

4. $\int (5/2 - x - 1/x)\,dx$ מ־$1/2$ עד 2 $= [2.5x - x^2/2 - \ln x] = 3.75 - 1.875 - (\ln 2 - \ln(1/2))$

5. $= 15/8 - 2\cdot\ln 2 \approx 0.49$

תשובה: $15/8 - 2\cdot\ln 2 \approx 0.49$

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה: שאלות הכניסה, ותזכורת e^0, $\ln 1$, $\ln e$ על הלוח (5 דקות).
2. דוגמה 1 יחד: תשובה מדויקת, ורק בסוף קירוב במחשבון.
3. כל זוג משרטט במילים את $y = e^x - 2$: חותך את ציר y ב־-1, עולה, וחוצה את ציר x ב־$\ln 2$.
4. דוגמה 2: חלוקה לשני חלקים, והשוואה לאינטגרל $\int_0^2 (e^x - 2)\,dx$ בלי חלוקה.
5. דוגמה 3: שטח בין שני גרפים, מי עליון ולמה.
6. דף עבודה: שאלות 1 עד 5, חלק הכוכב למתקדמים.
7. סיכום ושאלות יציאה.

💡 הערות למורה

בדוגמה 2 כדאי להראות שהאינטגרל בלי חלוקה יוצא $e^2 - 5 \approx 2.39$, קטן מהשטח. כך התלמידים רואים למה מחלקים. לתלמידים מתקשים: הדף המותאם עם רשימת ההצבות. דרשו תמיד שרטוט במילים לפני החישוב: איפה הגרף, איפה הציר, מי עליון.

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. כמה זה $\int_0^1 e^x\,dx$?

e | e − 1 | 1 | e + 1

2. כמה זה $\int_1^e (1/x)\,dx$?

0 | e | 1 | 1/e

3. מה השטח הכלוא בין $y = 1/x$, ציר x, $x = 1$ ו־$x = 3$?

ln 3 | 2 | ln 2 | 3

4. כמה זה $\int_0^{(\ln 2)} e^{(2x)}\,dx$?

3 | 2 | 1/2 | 3/2

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. חשבו $\int_0^{(\ln 5)} e^x\,dx$.
2. מצאו את השטח הכלוא בין $y = 2/x$, ציר x, $x = 1$ ו־$x = e$.

תשובות: 1. $e^{(\ln 5)} - e^0 = 5 - 1 = 4$. 2. $2\cdot\ln e - 2\cdot\ln 1 = 2$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: נושאים שלא ייבחנו בבגרות במתמטיקה, מועדי תשפ"ז (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה

מחוון: אינטגרל מסוים ושטחים עם e^x ו־$1/x$

1. תשובה: 2

פתרון:

קדומה: e^x.

$e^{(\ln 3)} - e^0 = 3 - 1$

2. תשובה: $\ln 4 \approx 1.39$

פתרון:

קדומה: $\ln(x-1)$ (בקטע $x - 1 > 0$).

$\ln 4 - \ln 1 = \ln 4$

$\ln 4 \approx 1.39$

3. תשובה: 2

פתרון:

בקטע הגרף מעל ציר x, לכן השטח שווה לאינטגרל.

$\int_1^{(e^2)} (1/x)\,dx = \ln e^2 - \ln 1$

$= 2 - 0 = 2$

4. תשובה: 1

פתרון:

חיתוך: $e^x = e$, $x = 1$. ציר y הוא $x = 0$.

בקטע $0 \le x \le 1$ הישר $y = e$ מעל $y = e^x$.

$\int_0^1 (e - e^x)\,dx = [e\cdot x - e^x] = (e - e) - (0 - 1)$

$= 1$

5. תשובה: (א) $x = 1$ (ב) 1/2

פתרון:

(א) $1/x - 1 = 0$, $x = 1$.

בקטע $1/2 \le x \le 1$ הגרף מעל הציר:

$\int (1/x - 1)\,dx = [\ln x - x] = (0 - 1) - (\ln(1/2) - 1/2) = \ln 2 - 1/2$.

בקטע $1 \le x \le 2$ הגרף מתחת לציר: $\int_1^2 (1 - 1/x)\,dx = [x - \ln x] = (2 - \ln 2) - 1 = 1 - \ln 2$.

מחברים: $\ln 2 - 1/2 + 1 - \ln 2 = 1/2$.

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: $e \approx 2.72$

פתרון:

(א) כלל המכפלה: $g'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot(1/x) = \ln x + 1$.

(ב) g היא קדומה של $\ln x + 1$.

$\int_1^e (\ln x + 1)\,dx = g(e) - g(1) = e\cdot\ln e - 1\cdot\ln 1$

$= e - 0 = e \approx 2.72$

7. תשובה: $15/2 - 8\cdot\ln 2 \approx 1.95$

פתרון:

חיתוך: $5 - x = 4/x$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x = 1$ או $x = 4$.

ב־$x = 2$: הישר נותן 3 והגרף 2, לכן הישר עליון.

$\int_1^4 (5 - x - 4/x)\,dx = [5x - x^2/2 - 4\cdot\ln x] = (20 - 8 - 4\cdot\ln 4) - (5 - 1/2)$

$= 15/2 - 4\cdot\ln 4 = 15/2 - 8\cdot\ln 2 \approx 1.95$

8. תשובה: $e + 1/e - 2 \approx 1.09$

פתרון:

חיתוך: $e^x = e^{(-x)}$, $x = -x$, $x = 0$.

בקטע $0 \le x \le 1$ עליונה e^x (למשל ב־$x = 1$: $e > 1/e$).

$\int_0^1 (e^x - e^{(-x)})\,dx = [e^x + e^{(-x)}] = (e + 1/e) - (1 + 1)$

$= e + 1/e - 2 \approx 1.09$

כרטיס יציאה: 1. $e^{(\ln 5)} - e^0 = 5 - 1 = 4$. 2. $2\cdot\ln e - 2\cdot\ln 1 = 2$.