כיתה י"ב · 5–4 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 1 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

🔄 פונקציה קדומה של e^x ושל $1/x$

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון, כיתה י"ב: 4 יח"ל (שאלון 35472): "חשבון אינטגרלי של פונקציה מעריכית ופונקציה שהקדומה שלה היא לוגריתמית... חישובי שטחים בעזרת אינטגרל מסוים". 5 יח"ל (שאלון 35572): "חשבון אינטגרלי של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות. האינטגרל כהצטברות שטח". שימו לב: לפי המיקוד לבגרות תשפ"ז, "מציאת פונקציה קדומה על פי הנגזרת ונקודה על גרף הפונקציה" לא תיבחן בשאלון 35472.

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- למצוא פונקציה קדומה של e^x, $e^{(ax+b)}$, $1/x$ ו־$1/(ax+b)$.
- לשלב אותן עם פולינומים, ולבדוק כל קדומה בגזירה.
- למצוא פונקציה לפי הנגזרת שלה ונקודה על הגרף.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. תזכורת מי"א: מצאו פונקציה קדומה של $3x^2 + 4x$.
2. גזרו: $(e^{(2x)})'$ ו־$(\ln x)'$.
3. איזו פונקציה נגזרתה $1/x$? למה הנוסחה $x^{n+1}/(n+1)$ לא עובדת כאן?

למורה: בשאלה 1 ודאו שכולם זוכרים את $+ C$. בשאלה 3 חפשו תלמידים שמנסים $x^0/0$ ומגלים שאי אפשר לחלק ב־0. זה הפתח ל־$\ln|x|$.

🔑 מושגי מפתח

פונקציה קדומה

F היא קדומה של f אם $F'(x) = f(x)$.

אינטגרל לא מסוים

כל הקדומות יחד: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

קבוע C

קבוע כלשהו. לנגזרת של קבוע אין השפעה, לכן מוסיפים אותו.

ln x

הלוגריתם בבסיס e. $(\ln x)' = 1/x$.

ln|x|

קדומה של $1/x$ בכל תחום שבו $x \neq 0$, גם כש־$x < 0$.

📖 הסבר למורה

תזכורת מי"א: $\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C$ לכל $n \neq -1$. קדומה של סכום היא סכום הקדומות, ומקדם נשאר בחוץ. השיעור היום ממלא את ה"חור" $n = -1$ ומוסיף את e^x.

$(e^x)' = e^x$, ולכן $\int e^x\,dx = e^x + C$. כי $(\ln|x|)' = 1/x$, מקבלים $\int (1/x)\,dx = \ln|x| + C$. כש־$x > 0$ כותבים פשוט $\ln x$.

כשבתוך הפונקציה יש ביטוי לינארי $ax + b$, מחלקים ב־a: $\int e^{(ax+b)}\,dx = (1/a)\cdot e^{(ax+b)} + C$ ו־$\int 1/(ax+b)\,dx = (1/a)\cdot\ln|ax+b| + C$. הסיבה: בגזירה כלל השרשרת מכפיל ב־a, ובקדומה צריך לבטל אותו.

טעויות נפוצות: לשכוח את $1/a$ (לכתוב $\int e^{(2x)}\,dx = e^{(2x)}$), להכפיל ב־$a$ במקום לחלק, לכתוב $\int (1/x)\,dx = x^0/0$, ולשכוח את C. הבדיקה הכי טובה: לגזור את התשובה ולקבל את הפונקציה המקורית.

מציאת פונקציה לפי נגזרת ונקודה: מוצאים קדומה עם C, מציבים את הנקודה ומחשבים את C. חשוב לזכור ש־$e^0 = 1$ ו־$\ln 1 = 0$. הנושא בתוכנית הלימודים, אך לפי המיקוד לא ייבחן בשאלון 35472 במועדי תשפ"ז.

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. מצאו את כל הפונקציות הקדומות של $f(x) = 3e^x + 4x^3$.

1. קדומה של $3e^x$ היא $3e^x$.
2. קדומה של $4x^3$ היא $4\cdot x^4/4 = x^4$.
3. מחברים ומוסיפים קבוע.
4. בדיקה: $(3e^x + x^4)' = 3e^x + 4x^3$.

תשובה: $F(x) = 3e^x + x^4 + C$

דוגמה 2. מצאו פונקציה קדומה של $f(x) = e^{(3x-1)} + 2/(2x+5)$, בתחום $x > -2.5$.

1. $\int e^{(3x-1)}\,dx = (1/3)\cdot e^{(3x-1)}$: מחלקים ב־3.
2. $\int 2/(2x+5)\,dx = 2\cdot(1/2)\cdot\ln(2x+5) = \ln(2x+5)$.
3. בתחום הנתון $2x + 5 > 0$, לכן אין צורך בערך מוחלט.

4. בדיקה בגזירה: $(1/3)\cdot 3\cdot e^{(3x-1)} + 2/(2x+5)$, נכון.

תשובה: $F(x) = (1/3)\cdot e^{(3x-1)} + \ln(2x+5) + C$

דוגמה 3. נתון $f'(x) = 4e^{(2x)} - 6$, והגרף של f עובר בנקודה $(0, 5)$. מצאו את $f(x)$.

1. $f(x) = 4\cdot(1/2)\cdot e^{(2x)} - 6x + C = 2e^{(2x)} - 6x + C$
2. מציבים $x = 0$: $2e^0 - 0 + C = 5$.
3. $2 + C = 5$, ולכן $C = 3$.

תשובה: $f(x) = 2e^{(2x)} - 6x + 3$

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה: שאלות הכניסה, תזכורת קצרה לקדומה של פולינום (5 דקות).
2. גילוי בזוגות: גוזרים e^x, $e^{(2x)}$, $\ln x$, $\ln(3x+1)$ ומנסחים כלל הפוך לקדומה.
3. המורה מסכם את ארבע הנוסחאות בטבלה על הלוח.
4. דוגמאות 1 ו־2: אחרי כל קדומה, תלמיד אחד גוזר בקול לבדיקה.
5. דוגמה 3: מציאת C לפי נקודה, בקצרה (בתוכנית, לא במיקוד הבגרות).
6. דף עבודה: שאלות 1 עד 5, מתקדמים ממשיכים לחלק הכוכב.
7. סיכום ושאלות יציאה.

💡 הערות למורה

הטעות השכיחה ביותר היא שכחת $1/a$ בקדומה של $e^{(ax+b)}$. בקשו מהתלמידים לגזור כל תשובה. מציאת פונקציה לפי נגזרת ונקודה: בתוכנית הלימודים, אך לפי המיקוד לא ייבחן בשאלון 35472 במועדי תשפ"ז. לכן מופיעים כאן רק דוגמה אחת ושאלה אחת בדף. לתלמידים מתקשים תנו את הדף המותאם עם טבלת הנוסחאות. למתקדמים: הסבירו למה $\int e^{(x^2)}\,dx$ לא נפתר בכלל הזה (הביטוי הפנימי אינו לינארי).

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. מהי פונקציה קדומה של $e^{(5x)}$?

- $(1/5)\cdot e^{(5x)} + C$
- $5e^{(5x)} + C$
- $e^{(5x)} + C$
- $5e^x + C$

2. מהי פונקציה קדומה של $1/x$ בתחום $x > 0$?

$x + C$ | $\ln x + C$ | $x^0/0 + C$ | $e^x + C$

3. מהי פונקציה קדומה של $1/(4x+1)$ בתחום $x > -1/4$?

$\ln(4x+1) + C$ | $4\cdot\ln(4x+1) + C$ | $(1/4)\cdot\ln(4x+1) + C$ | $\ln(x+1) + C$

4. מהי הנגזרת של $\ln(5x+2)$? (כך בודקים קדומה של $5/(5x+2)$.)

$1/(5x+2)$ | $5\cdot\ln 5$ | $5/(5x+2)$ | $\ln 5$

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. מצאו פונקציה קדומה של $6e^{2x} + 3/x$ בתחום $x > 0$.

2. בדקו בגזירה: האם $F(x) = (1/2)\cdot\ln(2x+1)$ היא קדומה של $1/(2x+1)$ בתחום $x > -1/2$?

תשובות: 1. $3e^{2x} + 3\cdot\ln x + C$. 2. כן: $F'(x) = (1/2)\cdot 2/(2x+1) = 1/(2x+1)$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: נושאים שלא ייבחנו בבגרות במתמטיקה, מועדי תשפ"ז (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה

מחוון: פונקציה קדומה של e^x ושל $1/x$

1. תשובה: $F(x) = 4e^x - 3x^2 + C$

פתרון:

קדומה של $4e^x$ היא $4e^x$.

קדומה של $6x$ היא $6\cdot x^2/2 = 3x^2$.

מוסיפים קבוע C.

2. תשובה: $F(x) = (1/4)\cdot e^{(4x+1)} + C$

פתרון:

הביטוי הפנימי לינארי: $a = 4$.

מחלקים ב־4: $(1/4)\cdot e^{(4x+1)}$.

בדיקה: $((1/4)\cdot e^{(4x+1)})' = (1/4)\cdot 4\cdot e^{(4x+1)} = e^{(4x+1)}$.

3. תשובה: $F(x) = 5\cdot \ln x + x^2 + C$

פתרון:

$\int (5/x)\,dx = 5\cdot \ln x$

$\int 2x\,dx = x^2$

מחברים ומוסיפים C.

4. תשובה: $F(x) = \ln(3x-2) + C$

פתרון:

$\int 3/(3x-2)\,dx = 3\cdot(1/3)\cdot \ln(3x-2)$

$= \ln(3x-2) + C$ (בתחום $3x - 2 > 0$).

בדיקה: $(\ln(3x-2))' = 3/(3x-2)$, נכון.

5. תשובה: $f(x) = 2e^{(3x)} + x^2 + 5$

פתרון:

$f(x) = 6\cdot(1/3)\cdot e^{(3x)} + x^2 + C = 2e^{(3x)} + x^2 + C$

מציבים $x = 0$: $2\cdot 1 + 0 + C = 7$.

$C = 5$

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: $F'(x) = x\cdot e^x$, ולכן F היא קדומה

פתרון:

גוזרים לפי כלל המכפלה: $(x\cdot e^x)' = e^x + x\cdot e^x$.

$F'(x) = e^x + x\cdot e^x - e^x = x\cdot e^x$.

קיבלנו $F'(x) = f(x)$, ולכן F קדומה של f.

7. תשובה: $F(x) = (1/2)\cdot e\text{^}(2x) + 2e^x + x + C$

פתרון:

פותחים סוגריים: $(e^x + 1)^2 = e\text{^}(2x) + 2e^x + 1$.

$\int e\text{^}(2x)\,dx = (1/2)\cdot e\text{^}(2x)$, $\int 2e^x\,dx = 2e^x$, $\int 1\,dx = x$.

בדיקה: $((1/2)\cdot e\text{^}(2x) + 2e^x + x)' = e\text{^}(2x) + 2e^x + 1$.

8. תשובה: $F(x) = x^2/2 + 3\cdot\ln x + C$

פתרון:

מפרקים את השבר: $(x^2 + 3)/x = x + 3/x$.

$\int x\,dx = x^2/2$, $\int (3/x)\,dx = 3\cdot\ln x$.

בדיקה: $(x^2/2 + 3\cdot\ln x)' = x + 3/x$.

כרטיס יצאה: 1. $3e\text{^}(2x) + 3\cdot\ln x + C$ 2. כן: $F'(x) = (1/2)\cdot 2/(2x+1) = 1/(2x+1)$.