כיתה י"ב · 5–4 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 2 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

🧪 לוגריתמים ובעיות גדילה ודעיכה

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון, כיתה י"ב: 4 יח"ל (שאלון 35472): "חוקי חזקות (כולל חזקות עם מעריך רציונלי). משוואות מעריכיות... לוגריתם, חוקי לוגריתמים, משוואות לוגריתמיות... בעיות גדילה ודעיכה... זמן מחצית חיים". 5 יח"ל (שאלון 35572): "אלגברה הקשורה לחזקות ולוגריתמים. בעיות גדילה ודעיכה". בבחינה 35472, בפרק הראשון: "בעיות גדילה ודעיכה".

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- להבין מהו לוגריתם ולהשתמש בחוקי הלוגריתמים.
- לפתור משוואה $a^x = b$ בעזרת לוגריתם, ומשוואה לוגריתמית פשוטה.
- לבנות מודל $f(t) = f(0)\cdot q^t$ ולמצוא כמות, זמן, מחצית חיים ונקודת השוואה בין שני תהליכים.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. באיזו חזקה צריך להעלות את 2 כדי לקבל 32?
2. מחיר מוצר עלה ב־10%. בכמה כופלים את המחיר הישן?
3. בין אילו שני מספרים שלמים נמצא הפתרון של $2^x = 12$?

למורה: שאלה 1 היא בדיוק $\log_2 32 = 5$, תנו לתלמידים לגלות את השם. בשאלה 3 חפשו את הנימוק $2^3 = 8 < 12 < 16 = 2^4$, לכן $3 < x < 4$.

🔑 מושגי מפתח

לוגריתם

$\log_a b = c \iff a^c = b$. הלוגריתם הוא המעריך. למשל $\log_2 8 = 3$.

log ו־ln

log בלי בסיס הוא בבסיס 10. ln הוא בבסיס $e \approx 2.718$.

מנת גדילה q

המספר שבו כופלים את הכמות בכל יחידת זמן. $q = 1 + p/100$.

גדילה ודעיכה

גדילה: $q > 1$. דעיכה: $0 < q < 1$.

זמן מחצית חיים

הזמן שבו כמות דועכת לחצי מערכה.

החלפת בסיס

$\log_a b = \log b / \log a$, כך מחשבים במחשבון.

📖 הסבר למורה

לוגריתם עונה על השאלה: באיזו חזקה צריך להעלות את הבסיס כדי לקבל מספר נתון? $\log_3 81 = 4$ כי $3^4 = 81$. הלוגריתם מוגדר רק למספר חיובי, והבסיס חיובי ושונה מ־1.

חוקי הלוגריתמים נובעים מחוקי החזקות: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$, $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$. טעות נפוצה: $\log(x + y) = \log x + \log y$. זה לא נכון. החוק הוא על מכפלה, לא על סכום.

כשאי אפשר לכתוב את שני האגפים באותו בסיס, משתמשים בלוגריתם: $5^x = 20$ נותן $x = \log_5 20 = \log 20 / \log 5 \approx 1.86$. במשוואה לוגריתמית בודקים בסוף שהפתרון בתחום ההגדרה, ופוסלים פתרון שנותן לוגריתם של מספר שלילי.

תהליך מעריכי משתנה באותו אחוז בכל יחידת זמן. המודל: $f(t) = f(0) \cdot q^t$. עלייה של $p\%$ נותנת $q = 1 + p/100$, וירידה של $p\%$ נותנת $q = 1 - p/100$. טעות נפוצה: לכתוב $q = 0.2$ לירידה של 20%. הנכון הוא $q = 0.8$.

שלושה סוגי שאלות חוזרים בבגרות: מציאת q משני נתונים (מחלקים ומוציאים שורש), מציאת זמן (משוואה מעריכית שפותרים בלוגריתם), והשוואה בין שני תהליכים (משווים את שתי הנוסחאות ופותרים את t).

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. חשבו $\log_2 64$, $\log_3(1/9)$ ו־$\log 0.001$.

1. $2^6 = 64$, לכן $\log_2 64 = 6$
2. $3^{-2} = 1/9$, לכן $\log_3(1/9) = -2$
3. $10^{-3} = 0.001$, לכן $\log 0.001 = -3$

תשובה: $6, -2, -3$

דוגמה 2. פתרו $5^x = 20$. תנו תשובה מדויקת ותשובה בקירוב של שתי ספרות אחרי הנקודה.

1. אי אפשר לכתוב 20 כחזקה שלמה של 5.

2. מפעילים לוגריתם: $x = \log_5 20$

3. החלפת בסיס: $x = \log 20 / \log 5$

4. במחשבון: $x \approx 1.86$

תשובה: $x = \log 20 / \log 5 \approx 1.86$

דוגמה 3. ערך מכונית חדשה הוא 120,000 ₪. אחרי 3 שנים ערכה 87,480 ₪. הערך יורד באותו אחוז בכל שנה. א. מצאו את q ואת אחוז הירידה השנתי. ב. אחרי כמה שנים יירד הערך אל מתחת ל־50,000 ₪?

1. א. $120000 \cdot q^3 = 87480$

2. $q^3 = 0.729$, לכן $q = 0.9$: ירידה של 10% בשנה.

3. ב. $120000 \cdot 0.9^t = 50000$

4. $0.9^t = 5/12$

5. $t = \log(5/12) / \log 0.9 \approx 8.31$

6. לכן במהלך השנה התשיעית, כלומר אחרי 9 שנים שלמות הערך כבר נמוך מ־50,000 ₪.

תשובה: $q = 0.9$ (ירידה של 10%), $t \approx 8.31$, כלומר אחרי 9 שנים

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה (5 דק'): שאלות הכניסה, מתן שם ללוגריתם.
2. הדגמה (7 דק'): ההגדרה ודוגמה 1, ואז חוקי הלוגריתמים עם דוגמה לכל חוק.
3. זוגות (6 דק'): כרטיסיות התאמה בין $\log_a b = c$ לבין $a^c = b$.
4. הדגמה (7 דק'): דוגמה 2 במחשבון, והסבר על החלפת בסיס.
5. קבוצות (12 דק'): כל קבוצה מקבלת הקשר (חיידקים, תרופה בדם, חיסכון, מכונית), בונה מודל $f(t) = f(0) \cdot q^t$ ושואלת שאלת זמן.
6. הצגה (5 דק'): דוגמה 3 ושאלת השוואה בין שני תהליכים.
7. סיום (3 דק'): שאלות יציאה.

💡 הערות למורה

תלמידים מתבלבלים בין q לבין אחוז השינוי. בקשו מהם לכתוב תמיד $q = 1 \pm p/100$ לפני הנוסחה.

בשאלת זמן, דונו בפירוש: $t \approx 8.31$ אומר במהלך השנה התשיעית. מתקדמים: שאלות האתגר, כולל השוואה בין שני תהליכים.

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. כמה זה $\log_3 81$?

27 | 4 | 3 | 9

2. כמה זה $\log_2 40 - \log_2 5$?

35 | $\log_2 35$ | 8 | 3

3. ריכוז תרופה בדם יורד ב־20% בכל שעה. מהו q?

0.2 | 1.2 | 0.8 | 0.98

4. זמן מחצית החיים של חומר הוא 10 שנים. היו 80 גרם. כמה יישארו אחרי 30 שנה?

10 גרם | 20 גרם | 40 גרם | 26.7 גרם

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. פתרו $2^x = 12$, בקירוב של שתי ספרות אחרי הנקודה.
2. חשבו $\log_6 4 + \log_6 9$.

תשובות: 1. $x = \log 12 / \log 2 \approx 3.58$ 2. $\log_6 36 = 2$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה

מחוון: לוגריתמים ובעיות גדילה ודעיכה

1. תשובה: א. 3 ב. 4− ג. 1/2

פתרון:

א. $5^3 = 125$, לכן 3

ב. $2^{-4} = 1/16$, לכן 4−

ג. $4^{(1/2)} = 2$, לכן 1/2

2. תשובה: א. 2 ב. 3

פתרון:

א. $\log_3(18/2) = \log_3 9 = 2$

ב. $\log_2 216 = \log_2 6^3 = 3\cdot\log_2 6 = 3$

$\log_2 216 - \log_2 27 = \log_2(216/27) = \log_2 8 = 3$

3. תשובה: $x = \log 20 / \log 3 \approx 2.73$

פתרון:

$x = \log_3 20$

$x = \log 20 / \log 3$

$x \approx 2.73$

בדיקת סבירות: $3^2 = 9 < 20 < 27 = 3^3$

4. תשובה: א. כ־9,274.19 ₪ ב. אחרי 8 שנים

פתרון:

$q = 1 + 3/100 = 1.03$

א. $8000\cdot 1.03^5 \approx 9274.19$ ₪

ב. $8000\cdot 1.03^t = 10000$, $1.03^t = 1.25$

$t = \log 1.25 / \log 1.03 \approx 7.55$

לכן אחרי 8 שנים שלמות.

5. תשובה: $t \approx 7.60$ שעות

פתרון:

$q = 1.2$, $f(t) = 500\cdot 1.2^t$

$500 \cdot 1.2^t = 2000$

$1.2^t = 4$

$t = \log 4 / \log 1.2 \approx 7.60$ שעות

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: $q = 2$, $f(0) = 225$

פתרון:

$f(0) \cdot q^5 = 7200$, $f(0) \cdot q^2 = 900$

מחלקים: $q^3 = 7200/900 = 8$

$q = 2$

$f(0) \cdot 4 = 900$, $f(0) = 225$

7. תשובה: אחרי 40 שעות

פתרון:

$f(t) = 160 \cdot (1/2)^{(t/8)}$

$160 \cdot (1/2)^{(t/8)} = 5$

$(1/2)^{(t/8)} = 1/32 = (1/2)^5$

$t/8 = 5$, $t = 40$ שעות

8. תשובה: $t \approx 9.43$ שנים

פתרון:

$20000 \cdot 1.08^t = 50000 \cdot 0.98^t$

$(1.08/0.98)^t = 2.5$

$t = \log 2.5 / \log(1.08/0.98) \approx 9.43$

כלומר במהלך השנה העשירית.

כרטיס יציאה: 1. $x = \log 12 / \log 2 \approx 3.58$ .2 $\log_6 36 = 2$.