כיתה י"ב · 5–4 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 1 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

📈 חזקות עם מעריך רציונלי ומשוואות מעריכיות

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון, כיתה י"ב: 4 יח"ל (שאלון 35472): "חוקי חזקות (כולל חזקות עם מעריך רציונלי). משוואות מעריכיות... לוגריתם, חוקי לוגריתמים, משוואות לוגריתמיות... בעיות גדילה ודעיכה... זמן מחצית חיים". 5 יח"ל (שאלון 35572): "אלגברה הקשורה לחזקות ולוגריתמים. בעיות גדילה ודעיכה". בבחינה 35472, בפרק הראשון: "בעיות גדילה ודעיכה".

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- לחשב חזקות עם מעריך שלילי ועם מעריך שהוא שבר.
- להכיר את הפונקציה $y = a^x$ ואת תכונות הגרף שלה.
- לפתור משוואות מעריכיות בהשוואת בסיסים ובהצבה, ואי־שוויון מעריכי פשוט.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. חשבו 2^5 ו־2^0.
2. מה $\sqrt{49}$? ומה $\sqrt[3]{125}$?
3. מושבת חיידקים מוכפלת פי 2 בכל שעה. בהתחלה יש 100 חיידקים. כמה יהיו אחרי 3 שעות?

למורה: בשאלה 3 חפשו מי כותב $100\cdot 2^3 = 800$ ומי מחבר 100 בכל שעה. זה הפתח להבדל בין גדילה מעריכית לגדילה קווית.

🔑 מושגי מפתח

מעריך שלילי

$a^{-n} = 1/a^n$, למשל $2^{-3} = 1/8$.

מעריך רציונלי

$a^{(m/n)} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$, למשל $8^{(2/3)} = 4$.

פונקציה מעריכית

$y = a^x$ כאשר $a > 0$ ו־$a \neq 1$. המשתנה נמצא במעריך.

אסימפטוטה

קו שהגרף מתקרב אליו ולא נוגע בו. כאן $y = 0$.

משוואה מעריכית

משוואה שבה הנעלם נמצא במעריך, כמו $2^{(x+1)} = 32$.

הצבה

מחליפים ביטוי חוזר באות חדשה, למשל $t = 2^x$, ופותרים משוואה פשוטה יותר.

📖 הסבר למורה

חוקי החזקות שהתלמידים מכירים נשארים נכונים גם למערך שלילי ולמעריך שבר. מערך שלילי הופך את הבסיס: $a^{-n} = 1/a^n$. מעריך שבר הוא שורש: המכנה הוא סדר השורש, והמונה הוא החזקה.

כדאי לחשב קודם את השורש ואחר כך את החזקה, כך המספרים קטנים: $27^{(2/3)} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$. טעות נפוצה: לחשוב ש־$16^{(-1/2)}$ שלילי. החזקה של מספר חיובי תמיד חיובית.

הפונקציה $y = a^x$ עוברת תמיד בנקודה $(0,1)$, כי $a^0 = 1$. כאשר $a > 1$ היא עולה, וכאשר $0 < a < 1$ היא יורדת. הגרף כולו מעל ציר x, והישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה אופקית. לכן למשוואה כמו $3^x = 0$ או $3^x = -9$ אין פתרון.

פותרים משוואה מעריכית בשני צעדים: כותבים את שני האגפים כחזקות של אותו בסיס, ואז משווים מעריכים. כשהביטוי a^x מופיע גם בריבוע (כמו $9^x = (3^x)^2$), מציבים $t = 3^x$ ומקבלים משוואה ריבועית. פתרון t שלילי נפסל.

באי־שוויון מעריכי משווים מעריכים כמו במשוואה. אם הבסיס גדול מ־1, כיוון אי־השוויון נשמר. אם הבסיס בין 0 ל־1, הכיוון מתהפך, כי הפונקציה יורדת.

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. חשבו $27^{(2/3)}$ ו־$16^{(-3/4)}$.

1. $27^{(2/3)} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
2. $16^{(-3/4)} = 1/16^{(3/4)}$
3. $16^{(3/4)} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$
4. לכן $16^{(-3/4)} = 1/8$

תשובה: 9 ו־$1/8$

דוגמה 2. פתרו $3^{(2x-1)} = 81$.

1. כותבים את 81 כחזקה של 3: $81 = 3^4$

2. $3^{(2x-1)} = 3^4$

3. משווים מעריכים: $2x - 1 = 4$

4. $2x = 5$, $x = 2.5$

תשובה: $x = 2.5$

דוגמה 3. פתרו $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$.

1. $9^x = (3^x)^2$. מציבים $t = 3^x$, $t > 0$.

2. $t^2 - 12t + 27 = 0$

3. $(t - 3)(t - 9) = 0$, $t = 3$ או $t = 9$

4. $3^x = 3$ נותן $x = 1$. $3^x = 9$ נותן $x = 2$.

תשובה: $x = 1$ או $x = 2$

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה (5 דק'): שאלות הכניסה, דיון על גדילה פי 2 מול גדילה ב־100.
2. הדגמה (8 דק'): מעריך שלילי ומעריך שבר, דוגמה 1 על הלוח.
3. זוגות (7 דק'): טבלת ערכים ל־$y = 2^x$ ול־$y = (1/2)^x$ עבור $x = -2$ עד $x = 2$, וסקיצה.
4. דיון (5 דק'): מה משותף לשני הגרפים? נקודה $(0,1)$, אסימפטוטה $y = 0$.
5. הדגמה (8 דק'): דוגמאות 2 ו־3, השוואת בסיסים והצבה.
6. עבודה עצמית (10 דק'): דף העבודה, שאלות 1 עד 5.
7. סיום (2 דק'): שאלות יציאה.

💡 הערות למורה

טעות נפוצה: $2^{(x+1)} = 2^x + 2$. הזכירו ש־$2^{(x+1)} = 2 \cdot 2^x$. תלמידים מתקשים: התחילו מטבלת חזקות של 2 ו־3 על הלוח. מתקדמים: שאלות האתגר, כולל אי־שוויון עם בסיס קטן מ־1.

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. כמה זה $8^{(2/3)}$?

4 | 16/3 | 2 | 6

2. איזו פונקציה יורדת?

$y = 3^x$ | $y = 2^x + 1$ | $y = (1/3)^x$ | $y = 5^x$

3. פתרו 2^(x+1) = 32.

x = 5 | x = 4 | x = 16 | x = 3

4. כמה זה 5^{-2}?

−25 | −10 | 1/10 | 1/25

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. פתרו 4^(x−1) = 64.

2. חשבו 32^(3/5).

תשובות: 1. $64 = 4^3$, $x - 1 = 3$, $x = 4$. 2. $(\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה
- משרד החינוך: נושאים שלא ייבחנו בבגרות במתמטיקה, מועדי תשפ"ז (PDF)

מחוון: חזקות עם מעריך רציונלי ומשוואות מעריכיות

1. תשובה: א. 5 ב. 16 ג. 1/3

פתרון:

א. $25^{(1/2)} = \sqrt{25} = 5$

ב. $64^{(2/3)} = (\sqrt[3]{64})^2 = 4^2 = 16$

ג. $81^{(-1/4)} = 1/\sqrt[4]{81} = 1/3$

2. תשובה: א. $2^{(3/2)}$ ב. $2^{(-2/3)}$

פתרון:

א. $2^{(3/2)} = (2^3)^{(1/2)} = \sqrt{8}$

ב. $2^{(2/3)} = (2^2)^{(1/3)} = \sqrt[3]{4}$

לכן $2^{(-2/3)} = 1/\sqrt[3]{4}$

3. תשובה: ב. יורדת בכל התחום ועוברת בנקודה (0,1)

פתרון:

הבסיס $1/2$ בין 0 ל־1, לכן הפונקציה יורדת.

$(1/2)^0 = 1$, לכן הגרף עובר ב־$(0,1)$.

כל ערכי הפונקציה חיוביים, לכן אין חיתוך עם ציר x.

4. תשובה: $x = 4$

פתרון:

$25 = 5^2$, לכן $25^{(x-1)} = 5^{(2x-2)}$

$5^{(2x-2)} = 5^{(x+2)}$

$2x - 2 = x + 2$

$x = 4$

5. תשובה: $x = 3$

פתרון:

$3^{(x+1)} = 3 \cdot 3^x$

$3 \cdot 3^x + 3^x = 4 \cdot 3^x = 108$

$3^x = 27 = 3^3$

$x = 3$

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: $x = 1$ או $x = 3$

פתרון:

$4^x = (2^x)^2$. מציבים $t = 2^x$, $t > 0$.

$t^2 - 10t + 16 = 0$

$(t - 2)(t - 8) = 0$, $t = 2$ או $t = 8$

$2^x = 2$ נותן $x = 1$. $2^x = 8$ נותן $x = 3$.

7. תשובה: $x \le -3$

פתרון:

$8 = (1/2)^{-3}$

$(1/2)^x \ge (1/2)^{-3}$

הבסיס בין 0 ל־1, לכן הכיוון מתהפך: $x \le -3$

8. תשובה: $x = 1$ או $x = -1$

פתרון:

$(2^x)^2 \cdot 2$^(2x+1). מציבים $t = 2^x$.

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$t = (5 \pm 3)/4$, לכן $t = 2$ או $t = 1/2$

$2^x = 2$ נותן $x = 1$. $2^x = 1/2$ נותן $x = -1$.

כרטיס יציאה: 1. $4^3 = 64$, $x - 1 = 3$, $x = 4$. 2. $(\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$.