כיתה י' · 4–5 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 2 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

🔍 חקירת פולינום

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון, כיתה י': 4 יח"ל: "מושג הנגזרת. פולינום: נגזרת, יישומים: משוואת משיק וחקירת פונקציה" (לקראת שאלון 35471). 5 יח"ל: "הנגזרת כקצב שינוי... נגזרת פולינום ויישומיה: משוואת משיק, חקירה" (לקראת שאלון 35571).

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- למצוא נקודות קיצון בעזרת $f'(x) = 0$ וטבלת סימנים.
- לקבוע תחומי עלייה וירידה.
- לחקור פולינום עד הסוף ולתאר סקיצה במילים.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. גזרו: $f(x) = x^3 - 3x^2$.
2. פתרו: $3x^2 - 6x = 0$.
3. אם השיפוע של משיק חיובי, האם הגרף עולה או יורד שם?

למורה: שאלה 3 היא המפתח לכל השיעור: סימן הנגזרת אומר עלייה או ירידה. בדקו שהתלמידים מוציאים גורם משותף בשאלה 2 ולא מחלקים ב-x.

🔑 מושגי מפתח

תחום הגדרה

כל ה-x שמותר להציב. לפולינום: כל x.

נקודת קיצון

נקודה שבה הגרף מחליף כיוון: מקסימום (מעלייה לירידה) או מינימום (מירידה לעלייה).

נקודה חשודה לקיצון

x שבו $f'(x) = 0$.

טבלת סימנים

טבלה שמראה את סימן $f'(x)$ בין הנקודות החשודות.

תחום עלייה

תחום שבו $f'(x) > 0$.

תחום ירידה

תחום שבו $f'(x) < 0$.

📖 הסבר למורה

הרעיון: $f'(x)$ הוא שיפוע. כאשר $f'(x) > 0$ הגרף עולה, וכאשר $f'(x) < 0$ הגרף יורד. בנקודת קיצון המשיק אופקי, ולכן $f'(x) = 0$.

סדר החקירה: 1. תחום הגדרה (לפולינום: כל x). 2. נגזרת ופתרון $f'(x) = 0$. 3. טבלת סימנים: מציבים בנגזרת מספר אחד מכל תחום. 4. סוג הקיצון וערך y. 5. תחומי עלייה וירידה. 6. חיתוך עם הצירים. 7. סקיצה.

בטבלה: מעבר מ-+ ל-− הוא מקסימום, מעבר מ-− ל-+ הוא מינימום. אם הסימן לא מתחלף, אין קיצון באותה נקודה, למשל ב-$f(x) = x^3$ בנקודה $x = 0$.

חיתוך עם ציר y: מציבים $x = 0$. חיתוך עם ציר x: פותרים $f(x) = 0$, בדרך כלל בהוצאת גורם משותף.

טעויות נפוצות: לחלק את המשוואה ב-x ולאבד את הפתרון $x = 0$; לכתוב את ערך x בלבד בלי ערך y של הנקודה; להציב בטבלה ב-f במקום ב-f'; לחשוב שכל $f'(x) = 0$ הוא קיצון.

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. חקרו את $f(x) = x^3 - 3x^2$: קיצון, עלייה וירידה, חיתוך עם הצירים.

1. תחום הגדרה: כל x.
2. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$
3. $f'(x) = 0$: $x = 0$ או $x = 2$.
4. טבלה: ב-$x = -1$: $f' = 9 > 0$; ב-$x = 1$: $f' = -3 < 0$; ב-$x = 3$: $f' = 9 > 0$.
5. מקסימום $(0, 0)$, מינימום $(2, -4)$.
6. עולה ב-$x < 0$ וב-$x > 2$. יורדת ב-$0 < x < 2$.
7. חיתוך: $x^2(x - 3) = 0$, הנקודות $(0, 0)$ ו-$(3, 0)$.

תשובה: מקסימום $(0, 0)$, מינימום $(2, -4)$; חיתוך $(0, 0)$, $(3, 0)$

דוגמה 2. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x) = x^4 - 2x^2$ וקבעו את סוגן.

1. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1)$

2. נקודות חשודות: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

3. סימני f': $-$ לפני -1, $+$ בין -1 ל-0, $-$ בין 0 ל-1, $+$ אחרי 1.

4. מינימום $(-1, -1)$, מקסימום $(0, 0)$, מינימום $(1, -1)$.

תשובה: מינימום $(-1, -1)$ ו-$(1, -1)$, מקסימום $(0, 0)$

דוגמה 3. הסבירו מדוע ל-$f(x) = x^3 + 3x$ אין נקודות קיצון.

1. $f'(x) = 3x^2 + 3$

2. $3x^2 + 3 = 0$ נותן $x^2 = -1$: אין פתרון.

3. הנגזרת תמיד חיובית, ולכן הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.

תשובה: אין פתרון ל-$f'(x) = 0$; הפונקציה עולה תמיד

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה (5 דק'): שאלות הכניסה, דיון על סימן השיפוע.
2. הדגמה (10 דק'): דוגמה 1 צעד אחרי צעד, כולל טבלת סימנים על הלוח.
3. זוגות (8 דק'): דוגמה 2, כל זוג ממלא טבלה עם 4 תחומים.
4. דיון (4 דק'): דוגמה 3, "נגזרת שאינה מתאפסת".
5. סקיצה (6 דק'): כל תלמיד מתאר במילים את גרף דוגמה 1 ומשרטט במחברת.
6. תרגול (9 דק'): סעיפים 1 עד 4 בדף העבודה.
7. סיום (3 דק'): שאלות יציאה.

💡 הערות למורה

כדאי לתלות על הקיר את שבעת שלבי החקירה. תלמידי 4 יח"ל: מספיקה חקירה של פולינום ממעלה 3 עם גורם משותף. תלמידי 5 יח"ל: מעלה 4, פרמטר, וחקירה מלאה עם סקיצה. תלמיד מתקשה: לתת לו טבלה מוכנה שבה רק ממלאים סימנים.

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. עבור $f(x) = x^2 - 6x$, היכן יש קיצון?

- $x = 6$
- $x = -3$
- $x = 3$
- $x = 0$

2. בטבלת סימנים f' עובר מ-$+$ ל-$-$. איזו נקודה זו?

מינימום | מקסימום | חיתוך עם ציר x | אין קיצון

3. מהו ערך y בנקודת המינימום של $f(x) = x^2 + 4x + 1$?

−3 | −2 | 1 | 3

4. היכן הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$ יורדת?

$x > 2$ | $-2 < x < 2$ | $x < -2$ | $x > 0$

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x) = x^3 - 3x$ וקבעו את סוגן.
2. היכן הגרף של $f(x) = x^3 - 3x$ חותך את ציר y?

תשובות: 1. מקסימום $(-1, 2)$, מינימום $(1, -2)$. 2. בנקודה $(0, 0)$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה

מחוון: חקירת פולינום

1. תשובה: מקסימום (2, 9)

פתרון:

$f'(x) = -2x + 4$

$-2x + 4 = 0$, $x = 2$

לפני 2: $f'(0) = 4 > 0$; אחרי: $f'(3) = -2 < 0$.

$f(2) = -4 + 8 + 5 = 9$

מקסימום (2, 9).

2. תשובה: מקסימום (1, 4), מינימום (3, 0)

פתרון:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$

$x = 1$ או $x = 3$

סימנים: + לפני 1, − בין 1 ל-3, + אחרי 3.

$f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$, $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$

מקסימום (1, 4), מינימום (3, 0).

3. תשובה: עולה ב-$x < 1$ וב-$x > 3$; יורדת ב-$1 < x < 3$

פתרון:

מהטבלה בסעיף הקודם:

עולה: $x < 1$ או $x > 3$.

יורדת: $1 < x < 3$.

4. תשובה: (0, 0) ו-(3, 0)

פתרון:

ציר y: $f(0) = 0$, הנקודה (0, 0).

ציר x: $x(x^2 - 6x + 9) = 0$

$x(x - 3)^2 = 0$, ולכן $x = 0$ או $x = 3$.

הנקודות: (0, 0) ו-(3, 0). ב-(3, 0) הגרף רק נוגע בציר (זו גם נקודת המינימום).

5. תשובה: א. יוצא מלמטה, עולה עד (1, 4), יורד ונוגע בציר ב-(3, 0), ועולה שוב

פתרון:

פולינום ממעלה 3 עם מקדם חיובי: משמאל למטה, מימין למעלה.

עולה עד המקסימום $(1, 4)$, יורד עד המינימום $(3, 0)$ על ציר x, ואז עולה.

עובר בראשית $(0, 0)$.

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: מינימום $(\pm 2, -16)$, מקסימום $(0, 0)$

פתרון:

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x - 2)(x + 2)$

חשודות: $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$.

סימנים: $-$, $+$, $-$, $+$.

$f(\pm 2) = 16 - 32 = -16$, $f(0) = 0$

מינימום $(-2, -16)$ ו-$(2, -16)$, מקסימום $(0, 0)$.

יורדת ב-$x < -2$ וב-$0 < x < 2$; עולה ב-$-2 < x < 0$ וב-$x > 2$.

7. תשובה: $a = -3$, מינימום $(2, 1)$

פתרון:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$

$f'(2) = 12 + 4a = 0$, ולכן $a = -3$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

סביב 2 הסימן עובר מ-$-$ ל-$+$: מינימום.

$f(2) = 8 - 12 + 5 = 1$, הנקודה $(2, 1)$.

8. תשובה: 3 פתרונות

פתרון:

מהשאלה ביציאה: מקסימום $(-1, 2)$, מינימום $(1, -2)$.

הישר $y = 1$ נמצא בין -2 ל-2.

הוא חותך את העלייה הראשונה, את הירידה ואת העלייה השנייה: 3 פתרונות.

כרטיס יציאה: 1. מקסימום $(-1, 2)$, מינימום $(1, -2)$. 2. בנקודה $(0, 0)$.