כיתה י' · 4–5 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 1 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

📈 הנגזרת: שיפוע, קצב שינוי ומשוואת משיק

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון, כיתה י': 4 יח"ל: "מושג הנגזרת. פולינום: נגזרת, יישומים: משוואת משיק וחקירת פונקציה" (לקראת שאלון 35471). 5 יח"ל: "הנגזרת כקצב שינוי... נגזרת פולינום ויישומיה: משוואת משיק, חקירה" (לקראת שאלון 35571).

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- להבין את הנגזרת כשיפוע המשיק וכקצב שינוי רגעי.
- לגזור פולינום לפי כללי הגזירה.
- למצוא ערך נגזרת בנקודה, משוואת משיק, ונקודה שבה השיפוע נתון.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. מהו השיפוע של הישר $y = 3x - 2$?
2. רכב עבר 150 ק"מ ב-2 שעות. מה המהירות הממוצעת?
3. חשבו $(f(3) - f(1))/(3 - 1)$ עבור $f(x) = x^2$.

למורה: שאלה 2 היא קצב שינוי ממוצע. שאלה 3 היא אותו רעיון על גרף: שיפוע של מיתר. חפשו תלמידים שמזהים ששתי השאלות זהות במבנה.

🔑 מושגי מפתח

קצב שינוי ממוצע

$(f(b) - f(a))/(b - a)$: שיפוע הישר שעובר בשתי נקודות על הגרף.

משיק

ישר שנוגע בגרף בנקודה ונראה כמו הגרף "מקרוב" סביבה.

נגזרת $f'(x)$

פונקציה שנותנת בכל x את שיפוע המשיק, כלומר את קצב השינוי הרגעי.

ערך נגזרת בנקודה

$f'(x_0)$: מספר, השיפוע של המשיק בנקודה x_0.

כלל החזקה

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. לדוגמה $(x^5)' = 5x^4$.

משוואת משיק

$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

📖 הסבר למורה

מתחילים מקצב שינוי ממוצע: שיפוע המיתר בין שתי נקודות. כשמקרבים את הנקודה השנייה לראשונה, המיתר הופך למשיק, והשיפוע מתקרב למספר אחד. המספר הזה הוא הנגזרת בנקודה.

כללי הגזירה של פולינום: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, הנגזרת של מספר קבוע היא 0, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, ונגזרת של סכום היא סכום הנגזרות. כך גוזרים איבר אחרי איבר.

משוואת משיק בשלושה צעדים: מוצאים $f(x_0)$ (הנקודה), מוצאים $f'(x_0)$ (השיפוע), ומציבים ב-$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

שיפוע נתון: אם המשיק מקביל לישר עם שיפוע m, פותרים $f'(x) = m$. אחר כך מציבים את x ב-f כדי לקבל את y של הנקודה.

טעויות נפוצות: לכתוב $(x^3)' = 3x^3$ במקום $3x^2$; לשכוח שנגזרת של קבוע היא 0; להציב במשוואת המשיק את $f'(x_0)$ במקום $f(x_0)$ בתור y של הנקודה.

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. עבור $f(x) = x^2$, חשבו את קצב השינוי הממוצע מ-$x = 3$ עד $x = 4$, עד $x = 3.1$ ועד $x = 3.01$. לאיזה מספר זה מתקרב?

1. $(16 - 9)/1 = 7$
2. $(9.61 - 9)/0.1 = 6.1$
3. $(9.0601 - 9)/0.01 = 6.01$
4. הקצב מתקרב ל-6.
5. לפי הכלל: $f'(x) = 2x$, ולכן $f'(3) = 6$. התאמה.

תשובה: מתקרב ל-6, שהוא $f'(3)$

דוגמה 2. מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x) = x^2 - 6x + 5$ בנקודה שבה $x = 4$.

1. הנקודה: $f(4) = 16 - 24 + 5 = -3$, כלומר $(4, -3)$.
2. הנגזרת: $f'(x) = 2x - 6$.

3. השיפוע: $f'(4) = 8 - 6 = 2$.

4. מציבים: $y + 3 = 2 \cdot (x - 4)$.

5. $y = 2x - 11$

תשובה: $y = 2x - 11$

דוגמה 3. באילו נקודות על הגרף $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ שיפוע המשיק הוא 9?

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$

2. $3x^2 - 6x = 9$

3. $x^2 - 2x - 3 = 0$

4. $(x - 3)(x + 1) = 0$, ולכן $x = 3$ או $x = -1$.

5. $f(3) = 27 - 27 + 1 = 1$, $f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3$.

תשובה: $(3, 1)$ ו-$(-1, -3)$

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה (5 דק'): שאלות הכניסה בזוגות, דיון קצר על מהירות ממוצעת.
2. הדגמה (7 דק'): דוגמה 1 על הלוח, טבלה של מיתרים שמתקצרים.
3. הכללים (8 דק'): כותבים את ארבעת כללי הגזירה, כל זוג גוזר 3 פולינומים.
4. משיק (8 דק'): דוגמה 2, שלושת הצעדים במסגרת על הלוח.
5. שיפוע נתון (7 דק'): דוגמה 3, התלמידים פותרים לפני שהמורה מראה.
6. תרגול (7 דק'): סעיפים 1 עד 3 בדף העבודה.
7. סיום (3 דק'): שאלות יציאה.

💡 הערות למורה

תלמידי 4 יח"ל: להתמקד בכללים ובשלושת הצעדים של המשיק. תלמידי 5 יח"ל: לשאול למה קצב ממוצע מתקרב לנגזרת, ולהוסיף את הסעיפים המאתגרים עם פרמטר. תלמיד שמתבלבל בין f ל-f': לבקש ממנו לכתוב ליד כל מספר אם הוא "נקודה" או "שיפוע".

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. מהי הנגזרת של $5x^4$?

- $5x^3$
- $20x^3$
- $20x^4$
- $4x^3$

2. מהי הנגזרת של המספר הקבוע 7?

7 | 1 | 0 | 7x

3. עבור $f(x) = x^2 + 3x$, מהו $f'(1)$?

4 | 2 | 3 | 5

4. מהו שיפוע המשיק לגרף $f(x) = x^3$ בנקודה $x = -2$?

12 | −12 | −8 | 6

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. גזרו: $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$.

2. מצאו את משוואת המשיק לגרף $f(x) = x^2$ בנקודה $x = 3$.

תשובות: 1. $f'(x) = 6x^2 - 2x$. 2. $f(3) = 9$, $f'(3) = 6$, ולכן $y = 6x - 9$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה

מחוון: הנגזרת: שיפוע, קצב שינוי ומשוואת משיק

1. תשובה: $f'(x) = 5x^4 - 6x + 7$

פתרון:

גוזרים איבר אחרי איבר.

$(x^5)' = 5x^4$

$(-3x^2)' = -6x$

$(7x)' = 7$, $(-1)' = 0$

$f'(x) = 5x^4 - 6x + 7$

2. תשובה: $f'(-1) = 10$

פתרון:

$f'(x) = 12x^2 - 2$

$f'(-1) = 12\cdot(-1)^2 - 2 = 12 - 2 = 10$

3. תשובה: 7

פתרון:

$f(4) = 16 + 8 = 24$

$f(1) = 1 + 2 = 3$

$(24 - 3)/(4 - 1) = 21/3 = 7$

4. תשובה: $y = x - 2$

פתרון:

הנקודה: $f(1) = 1 - 2 = -1$, כלומר $(1, -1)$.

$f'(x) = 3x^2 - 2$

השיפוע: $f'(1) = 1$

$y + 1 = 1\cdot(x - 1)$

$y = x - 2$

5. תשובה: ב. $x = 4$

פתרון:

$f'(x) = 2x - 8$

$$2x - 8 = 0$$

$$x = 4$$

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: $y = 2x - 8$, $(3, -2)$

פתרון:

ישרים מקבילים: שיפוע שווה, $f'(x) = 2x - 4 = 2$.

$$x = 3$$

$f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$, הנקודה $(3, -2)$.

$y + 2 = 2 \cdot (x - 3)$, כלומר $y = 2x - 8$.

7. תשובה: $a = 3$

פתרון:

$$f'(x) = 3x^2 + a$$

$$f'(2) = 12 + a$$

$$12 + a = 15$$

$$a = 3$$

8. תשובה: 10 מ' לשנייה; ב-$t = 2$, בגובה 20 מ'

פתרון:

המהירות היא קצב שינוי הגובה: $h'(t) = 20 - 10t$.

$h'(1) = 10$ מטר לשנייה.

$20 - 10t = 0$, ולכן $t = 2$.

$h(2) = 40 - 20 = 20$ מטר: זה הגובה המרבי.

כרטיס יציאה: 1. $f'(x) = 6x^2 - 2x$ 2. $f(3) = 9$, $f'(3) = 6$, ולכן $y = 6x - 9$.