כיתות י"א–י"ב · 4–5 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 2 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי וממלכתי-דתי

✖️ סדרה הנדסית, סכום אינסופי ושילוב סדרות

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון: 4 יח"ל, כיתה י"ב (שאלון 35472): "סדרה חשבונית. סדרה הנדסית (כולל אינסופית שסכומה מתכנס). שילוב סדרה חשבונית וסדרה הנדסית". 5 יח"ל, כיתה י"א (שאלון 35571): מבוא לסדרות וסדרה הנדסית. שימו לב: לפי המיקוד לבגרות תשפ"ז, "סדרה חשבונית" לא תיבחן בשאלון 35571.

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- לזהות סדרה הנדסית ולמצוא את המנה q.
- למצוא איבר כללי וסכום S_n של סדרה הנדסית.
- לחשב סכום אינסופי כאשר $|q| < 1$, ולפתור בעיה המשלבת סדרה חשבונית והנדסית.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. המשיכו: $3, 6, 12, 24, \ldots$
2. המשיכו: $81, 27, 9, \ldots$
3. דף נייר מקופל לשניים 6 פעמים. כמה שכבות יש?

למורה: שימו לב מי מנסה להוסיף מספר קבוע ומגלה שזה לא עובד. בשאלה 3 התשובה $2^6 = 64$ מראה כמה מהר סדרה הנדסית גדלה.

🔑 מושגי מפתח

סדרה הנדסית

סדרה שבה המנה בין כל איבר לקודמו קבועה.

מנת הסדרה q

$q = a_{n+1} / a_n$. $q \neq 0$.

איבר כללי

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

סכום S_n

$S_n = a_1\cdot(q^n - 1)/(q - 1)$ כאשר $q \neq 1$.

סכום אינסופי מתכנס

$S = a_1/(1 - q)$, רק כאשר $|q| < 1$.

📖 הסבר למורה

בסדרה הנדסית עוברים מאיבר לאיבר על ידי כפל באותו מספר q. אם q שלילי, הסימנים מתחלפים.

כדי להגיע לאיבר ה־n כופלים ב־q בדיוק $n-1$ פעמים: $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$. טעות נפוצה: $(a_1\cdot q)^{n-1}$ במקום $a_1\cdot q^{n-1}$.

נוסחת הסכום $S_n = a_1\cdot(q^n - 1)/(q - 1)$ לא עובדת כאשר $q = 1$, כי אז מחלקים באפס. במקרה זה כל האיברים שווים ו־$S_n = n\cdot a_1$.

כאשר $|q| < 1$ האיברים קטנים והולכים, והסכום מתקרב למספר קבוע: $S = a_1/(1 - q)$. כאשר $|q| \geq 1$ אין סכום סופי. שבר עשרוני מחזורי הוא סכום כזה, למשל $0.363636\ldots = 36/100 + 36/10000 + \ldots$.

בבעיה משולבת יש שתי סדרות. כותבים כל איבר בעזרת a_1 ו־d של הסדרה החשבונית, ומשתמשים בתכונה של סדרה הנדסית: לשלושה איברים עוקבים $b_2^2 = b_1\cdot b_3$.

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. בסדרה הנדסית $a_1 = 3$ ו־$q = 2$. מצאו את a_8.

1. $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$
2. $a_8 = 3\cdot 2^7$
3. $a_8 = 3\cdot 128 = 384$

תשובה: $a_8 = 384$

דוגמה 2. בסדרה הנדסית $a_2 = 12$ ו־$a_5 = 96$. מצאו את a_1, את q ואת S_6.

1. $a_1\cdot q = 12$ ו־$a_1\cdot q^4 = 96$.
2. מחלקים: $q^3 = 8$, ולכן $q = 2$.
3. $a_1 = 12/2 = 6$
4. $S_6 = 6\cdot(2^6 - 1)/(2 - 1) = 6\cdot 63 = 378$

תשובה: $a_1 = 6$, $q = 2$, $S_6 = 378$

דוגמה 3. כתבו את השבר המחזורי $0.363636\ldots$ כשבר פשוט.

1. $0.3636\ldots = 36/100 + 36/10000 + \ldots$

2. סדרה הנדסית: $a_1 = 36/100$, $q = 1/100$, ו־$|q| < 1$.

3. $S = (36/100)/(1 - 1/100) = (36/100)/(99/100)$

4. $S = 36/99 = 4/11$

תשובה: 4/11

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה: שאלות הכניסה ופעילות קיפול הנייר (5 דקות).
2. השוואה: טבלה של סדרה חשבונית מול סדרה הנדסית, מה מוסיפים ומה כופלים.
3. דוגמה 1 ודוגמה 2 בהנחיית המורה.
4. סכום אינסופי: מציירים ריבוע ומחלקים לחצאים, רבעים ושמיניות. מגיעים לסכום 1.
5. דוגמה 3: שבר מחזורי. כל זוג ממיר שבר מחזורי אחר ובודק במחשבון.
6. דף עבודה: שאלות 1 עד 5, מתקדמים לחלק הכוכב עם הבעיה המשולבת.
7. סיכום ושאלות יציאה.

💡 הערות למורה

תלמידים רבים מבלבלים בין d ל־q: בקשו לבדוק תמיד גם חיסור וגם חילוק. הדגישו שסכום אינסופי קיים רק כאשר $|q| < 1$. לתלמידים מתקשים תנו את הדף המותאם עם תיבת הנוסחאות. למתקדמים: הבעיה המשולבת וכתיבת $0.4555\ldots$ כשבר.

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. מהי המנה בסדרה 5, 15, 45, ...?

- 10
- 1/3
- 3
- 5

2. בסדרה הנדסית $a_1 = 2$ ו־$q = 3$. מהו a_5?

- 162
- 486
- 30
- 54

3. מהו הסכום האינסופי של סדרה הנדסית עם $a_1 = 12$ ו־$q = 1/4$?

- 48
- 16
- 9
- 15

4. לאיזו סדרה הנדסית אינסופית יש סכום סופי?

$q = 2$	$q = -1$	$q = 1$	$q = 0.3$

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. בסדרה הנדסית $a_1 = 4$ ו־$q = -2$. מצאו את a_6.
2. כתבו את $0.777\ldots$ כשבר פשוט.

תשובות: 1. $a_6 = 4\cdot(-2)^5 = -128$ 2. $S = (7/10)/(1 - 1/10) = 7/9$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: נושאים שלא ייבחנו בבגרות במתמטיקה, מועדי תשפ"ז (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה

מחוון: סדרה הנדסית, סכום אינסופי ושילוב סדרות

1. תשובה: $q = 3$, $a_7 = 1458$

פתרון:

$q = 6/2 = 3$

$a_7 = 2 \cdot 3^6$

$a_7 = 2 \cdot 729 = 1458$

2. תשובה: $a_6 = 5$

פתרון:

$160 \cdot (1/2)^{n-1} = 5$

$(1/2)^{n-1} = 1/32$

$2^{n-1} = 32 = 2^5$

$n - 1 = 5$, ולכן $n = 6$.

3. תשובה: $q = 3$, $a_1 = 2$

פתרון:

$a_1 \cdot q^2 = 18$ ו־$a_1 \cdot q^4 = 162$.

מחלקים: $q^2 = 9$. הסדרה חיובית, ולכן $q = 3$.

$a_1 = 18/9 = 2$

4. תשובה: $S_{10} = 1023$

פתרון:

$a_1 = 1$, $q = 2$.

$S_{10} = 1 \cdot (2^{10} - 1)/(2 - 1)$

$S_{10} = 1024 - 1 = 1023$

5. תשובה: 16/9 מטר, בערך 1.78 מטר

פתרון:

הגבהים: $9, 9 \cdot (2/3), 9 \cdot (2/3)^2, \ldots$.

אחרי 4 פגיעות: $9 \cdot (2/3)^4$.

$9 \cdot 16/81 = 16/9 \approx 1.78$ מטר.

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: $q = 1/3$

פתרון:

$24/(1 - q) = 36$

$1 - q = 24/36 = 2/3$

$q = 1/3$, ואכן $|q| < 1$.

7. תשובה: $d = 3$, $q = 4$

פתרון:

$a_3 = 2 + 2d$, $a_{11} = 2 + 10d$.

בסדרה הנדסית: $a_3^2 = a_1 \cdot a_{11}$.

$(2 + 2d)^2 = 2 \cdot (2 + 10d)$

$4 + 8d + 4d^2 = 4 + 20d$, ולכן $4d^2 = 12d$.

$d \neq 0$, ולכן $d = 3$. הסדרה ההנדסית: $2, 8, 32$, ו־$q = 4$.

8. תשובה: $41/90$

פתרון:

$0.4555\ldots = 4/10 + 5/100 + 5/1000 + \ldots$

החלק המחזורי: $a_1 = 5/100$, $q = 1/10$.

$(5/100)/(1 - 1/10) = (5/100) \cdot (10/9) = 5/90$

$4/10 + 5/90 = 36/90 + 5/90 = 41/90$

כרטיס יציאה: 1. $a_6 = 4 \cdot (-2)^5 = -128$ 2. $S = (7/10)/(1 - 1/10) = 7/9$.