כיתות י"א–י"ב · 4–5 יח"ל | חשבון ומתמטיקה | שיעור 1 מתוך 2 | 45 דק' | תיכון | מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

➕ סדרה חשבונית: איבר כללי וסכום

📚 בהתאם לתוכנית הלימודים

בתוכנית החדשה לתיכון: 4 יח"ל, כיתה י"ב (שאלון 35472): "סדרה חשבונית. סדרה הנדסית (כולל אינסופית שסכומה מתכנס). שילוב סדרה חשבונית וסדרה הנדסית". 5 יח"ל, כיתה י"א (שאלון 35571): מבוא לסדרות וסדרה הנדסית. שימו לב: לפי המיקוד לבגרות תשפ"ז, "סדרה חשבונית" לא תיבחן בשאלון 35571.

משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)

🎯 מטרות השיעור

- לזהות סדרה חשבונית ולמצוא את ההפרש d.
- למצוא איבר כללי ולמצוא a_1 ו־d משני איברים.
- לחשב סכום S_n ולפתור בעיות מילוליות.

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בתחילת השיעור כל תלמיד עונה על פתק, בלי ציון:

1. המשיכו את הסדרה: $5, 9, 13, 17, \ldots$
2. מה משותף לסדרה $40, 35, 30, 25$ ולסדרה הקודמת?
3. כמה מושבים יש בשורה העשירית, אם בשורה הראשונה 12 ובכל שורה 2 יותר?

למורה: חפשו תלמידים שמזהים 'מוסיפים אותו מספר כל פעם'. בשאלה 3 בדקו מי מחשב $12 + 9\cdot 2$ ומי טועה ב־$12 + 10\cdot 2$.

🔑 מושגי מפתח

סדרה

רשימה מסודרת של מספרים: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

איבר כללי a_n

האיבר שנמצא במקום ה־n בסדרה.

סדרה חשבונית

סדרה שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים קבוע.

הפרש הסדרה d

$d = a_{n+1} - a_n$. יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.

סכום S_n

סכום n האיברים הראשונים של הסדרה.

📖 הסבר למורה

בסדרה חשבונית עוברים מאיבר לאיבר על ידי הוספת אותו מספר d. אם $d > 0$ הסדרה עולה, ואם $d < 0$ היא יורדת.

כדי להגיע לאיבר ה־n מוסיפים את d בדיוק $n-1$ פעמים. לכן $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$. טעות נפוצה: לכתוב $n\cdot d$ במקום $(n-1)\cdot d$.

כאשר נתונים שני איברים, כותבים לכל אחד משוואה עם a_1 ו־d ופותרים מערכת. קיצור דרך: ההפרש בין a_{12} ל־a_5 הוא $7d$.

הסכום: מחברים את הסדרה עם עצמה בסדר הפוך. כל זוג שווה $a_1 + a_n$, ויש n זוגות. לכן $S_n = n\cdot(a_1+a_n)/2$. כשלא ידוע a_n מציבים ומקבלים $S_n = n\cdot(2a_1+(n-1)\cdot d)/2$.

בבעיות מילוליות חשוב להחליט מה הוא n: מספר השבוע, מספר השורה, מספר הקומה. טעות נפוצה: לבלבל בין איבר (כמה בשורה אחת) לבין סכום (כמה בכל השורות).

✏️ דוגמאות פתורות ללוח

דוגמה 1. בסדרה חשבונית $a_1 = 7$ ו־$d = 4$. מצאו את a_{20}.

1. נוסחת האיבר הכללי: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.
2. מציבים $n = 20$: $a_{20} = 7 + 19\cdot 4$.
3. $a_{20} = 7 + 76 = 83$.

תשובה: $a_{20} = 83$

דוגמה 2. בסדרה חשבונית $a_5 = 23$ ו־$a_{12} = 51$. מצאו את a_1 ואת d.

1. $a_5 = a_1 + 4d = 23$
2. $a_{12} = a_1 + 11d = 51$
3. מחסרים: $7d = 28$, ולכן $d = 4$.
4. מציבים: $a_1 + 16 = 23$, ולכן $a_1 = 7$.

תשובה: $a_1 = 7$, $d = 4$

דוגמה 3. באולם 25 שורות. בשורה הראשונה 18 מושבים, ובכל שורה 2 מושבים יותר מבקודמת. כמה מושבים באולם?

1. זו סדרה חשבונית: $a_1 = 18$, $d = 2$, $n = 25$.
2. השורה האחרונה: $a_{25} = 18 + 24\cdot 2 = 66$.
3. הסכום: $S_{25} = 25\cdot(18+66)/2$.
4. $S_{25} = 25\cdot 42 = 1050$.

תשובה: 1050 מושבים

👩‍🏫 פעילות בכיתה

1. פתיחה: שאלות הכניסה על הלוח (5 דקות).
2. גילוי: התלמידים כותבים את a_2, a_3, a_4 בעזרת a_1 ו־d ומנסחים את האיבר הכללי.
3. דוגמה 1 ודוגמה 2 בהנחיית המורה.
4. סיפור הסכום: מחברים $1 + 2 + \ldots + 100$ בזוגות מהקצוות.
5. עבודה בזוגות: דוגמת האולם, כל זוג מחשב בשתי נוסחאות הסכום ומשווה.
6. דף עבודה: שאלות 1 עד 4, מתקדמים ממשיכים לחלק הכוכב.
7. סיכום ושאלות יציאה.

💡 הערות למורה

הטעות הנפוצה ביותר היא $n\cdot d$ במקום $(n-1)\cdot d$: בקשו מהתלמידים לבדוק את הנוסחה על $n = 1$.

לתלמידים מתקשים תנו את הדף המותאם עם טבלה של n ו־a_n. למתקדמים: לפתור בעיה שבה n לא ידוע והסכום נתון.

❓ שאלות תרגול (בודקים בלחיצה)

1. מהו ההפרש בסדרה $3, 10, 17, \ldots$?

7 | 3 | 10 | -7

2. בסדרה חשבונית $a_1 = 50$ ו־$d = -3$. מהו a_{11}?

17 | 20 | 23 | -20

3. מהו סכום 10 האיברים הראשונים בסדרה 2, 4, 6, ...?

100 | 120 | 110 | 20

4. איזו מהסדרות היא סדרה חשבונית?

2, 4, 8, 16 | 1, 4, 9, 16 | 3, 3, 4, 5 | 5, 8, 11, 14

עוד תרגול: בוחן תרגול של 10 שאלות ליחידה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. בסדרה חשבונית $a_1 = 4$ ו־$d = 6$. מצאו את a_{15}.

2. מצאו את סכום 20 האיברים הראשונים באותה סדרה.

תשובות: 1. $a_{15} = 4 + 14\cdot6 = 88$. 2. $S_{20} = 20\cdot(2\cdot4+19\cdot6)/2 = 10\cdot122 = 1220$.

📝 בדף העבודה

5 תרגילים, ★ חלק אקסטרה למתקדמים, ומחוון עם פתרון מלא לכל תרגיל. למתקשים יש דף עם תמיכה: מחסן מילים, תזכורת של הכלל ושאלות בשלבים.

מקורות רשמיים לבדיקה

- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 4 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: המלצות הוראה תשפ"ז, 5 יח"ל (PDF)
- משרד החינוך: נושאים שלא ייבחנו בבגרות במתמטיקה, מועדי תשפ"ז (PDF)
- המרחב הפדגוגי: תוכנית הלימודים החדשה בחטיבה העליונה

מחוון: סדרה חשבונית: איבר כללי וסכום

1. תשובה: $a_{10} = 57$

פתרון:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$a_{10} = 12 + 9\cdot 5$

$a_{10} = 12 + 45 = 57$

2. תשובה: כן, $a_{15} = 2$

פתרון:

$a_1 = 100$, $d = -7$.

$a_n = 100 + (n-1)\cdot(-7) = 107 - 7n$

$107 - 7n = 2$

$7n = 105$, ולכן $n = 15$.

n שלם וחיובי, ולכן 2 הוא איבר.

3. תשובה: $a_1 = 3$, $d = 4$

פתרון:

$a_1 + 2d = 11$

$a_1 + 8d = 35$

מחסרים: $6d = 24$, ולכן $d = 4$.

$a_1 = 11 - 8 = 3$

4. תשובה: $S_{30} = 1830$

פתרון:

$a_1 = 3$, $d = 4$, $n = 30$.

$S_{30} = 30\cdot(2\cdot 3 + 29\cdot 4)/2$

$S_{30} = 15\cdot(6 + 116) = 15\cdot 122 = 1830$

5. תשובה: אחרי 17 שבועות

פתרון:

$a_1 = 20$, $d = 5$, $S_n = 1020$.

$n\cdot(2\cdot 20 + (n-1)\cdot 5)/2 = 1020$

$n\cdot(35 + 5n) = 2040$

$5n^2 + 35n - 2040 = 0$, נחלק ב־5: $n^2 + 7n - 408 = 0$.

$n = (-7 \pm 41)/2$, ולכן $n = 17$ ($n = -24$ נפסל).

★ חלק אקסטרה למתקדמים

6. תשובה: 1665

פתרון:

זו סדרה חשבונית: $d = 3$,$12, 15, \ldots, 99$.

מספר האיברים: $12 + (n-1)\cdot 3 = 99$, ולכן $n = 30$.

$S_{30} = 30\cdot(12+99)/2 = 15\cdot 111 = 1665$

7. תשובה: $S_{20} = 1180$

פתרון:

$a_{n+1} - a_n = 6(n+1) - 4 - (6n - 4) = 6$, קבוע, ולכן הסדרה חשבונית.

$a_1 = 2$, $a_{20} = 116$.

$S_{20} = 20\cdot(2+116)/2 = 10\cdot 118 = 1180$

8. תשובה: 23 שורות, 86 מושבים בשורה האחרונה

פתרון:

$n\cdot(2\cdot 20 + (n-1)\cdot 3)/2 = 1219$

$n\cdot(37 + 3n) = 2438$

$3n^2 + 37n - 2438 = 0$

$n = (-37 \pm 175)/6$, ולכן $n = 23$.

השורה האחרונה: $a_{23} = 20 + 22\cdot 3 = 86$.

כרטיס יציאה: 1. $a_{15} = 4 + 14\cdot 6 = 88$. 2. $S_{20} = 20\cdot(2\cdot 4+19\cdot 6)/2 = 10\cdot 122 = 1220$.