כיתות י'-י"ב | מורה מחליף | שיעור חירום · עומד בפני עצמו | 45 דק' | 5 דקות הכנה | 🖨️ בלי מקרן

מתאים לממלכתי ולממלכתי-דתי

23 אנשים, יום הולדת אחד: כשהאינטואיציה טועה

📖 הסבר למורה: הכנה ב-5 דקות

השיעור דורש לוח ודף עבודה. מחשבון עוזר אבל לא חובה. הוא עומד בפני עצמו, מתאים לכל מגמה, ולא דורש ידע קודם בהסתברות מעבר לשברים.

1. מדפיסים את דף העבודה, עותק לכל תלמיד (עמוד אחד).
2. כותבים על הלוח בגדול: 23 ו-50.7%.
3. מעתיקים ללוח את טבלת ההסתברויות (למטה).
4. קוראים פעם אחת את הסיפור "המחליף שהתערב על עוגה" (שתי דקות).

🎯 מטרות השיעור

- התלמידים יבינו למה ההסתברות לצירוף מקרים בקבוצה גבוהה ממה שנדמה
- התלמידים יחשבו הסתברות דרך המאורע המשלים ("אף אחד לא...")
- התלמידים יבחנו טענה מפתיעה בעזרת ספירת זוגות

🚪 פתק כניסה (3 דקות)

בראש דף העבודה, 3 דקות, בלי מחשבון:

1. בכיתה של 30 תלמידים, מה הסיכוי (באחוזים) ששניים נולדו באותו יום בשנה? נחשו.
2. כמה זוגות שונים אפשר להרכיב מ-4 אנשים?
3. מה הסיכוי שבהטלת מטבע אחת לא ייצא "עץ"?

למורה: שאלה 1: ניחוש בלבד, אוספים על הלוח. ניחושים רבים נמוכים בהרבה; התשובה (בהנחות הפשוטות) היא כ-70.6%. שאלה 2: 6. שאלה 3: חצי (המשלים של "עץ").

⏱️ מהלך השיעור דקה אחר דקה

דקות	מה עושים (ומה אומרים)

0-4	"שלום, אני המורה המחליף. אני מוכן להתערב איתכם על משהו, ובסוף השיעור תבינו למה אני רגוע." פתק כניסה. כותבים את הניחושים לשאלה 1 על הלוח.
4-9	המספר הגדול: 23. "בקבוצה של 23 אנשים, הסיכוי ששניים חוגגים יום הולדת באותו תאריך הוא יותר מחצי: 50.7%." משווים לניחושים.
9-14	מקריאים את הסיפור "המחליף שהתערב על עוגה". עוצרים לפני הסוף ושואלים: "מי היה מתערב נגד המחליף?"
14-24	למה זה נכון: סופרים זוגות (253 זוגות ב-23 אנשים) ומחשבים יחד דרך המשלים, עבור 2 ו-3 אנשים, על הלוח. קוראים את הטבלה.
24-36	דף העבודה, לבד או בזוגות. משימה 6 (חודשי לידה) היא האתגר.
36-41	ניסוי בכיתה (רשות): כל מי שרוצה אומר יום וחודש לידה, בלי שנה. מי שלא רוצה בוחר תאריך אקראי. בודקים אם יש התאמה.
41-45	בדיקה עצמית קצרה, כרטיס יציאה וסיכום: "מתי עוד האינטואיציה שלנו טועה?"

🔢 פתיחה: המספר הגדול

23

כותבים על הלוח 23 ושואלים: "כמה אנשים צריך בחדר כדי שהסיכוי ששניים מהם נולדו באותו יום יהיה יותר מחצי?" הרבה פעמים הניחוש הוא מספר גדול, למשל 100, או 183 (חצי מ-365).

התשובה: 23. ב-23 אנשים הסיכוי הוא כ-50.7%, ובכיתה של 30 כבר כ-70.6%. המספרים מחושבים בהנחה ש-365 הימים שווים בסיכוי ובלי 29 בפברואר, הנחות מקובלות לחישוב הזה.

📜 סיפור: המחליף שהתערב על עוגה (להקראה)

ביום שלישי בבוקר נכנס לכיתה י'2 מורה מחליף לשיעור מתמטיקה. הכיתה ציפתה לשיעור משעמם. הוא כתב על הלוח: "התערבות".

"אני מוכן להתערב איתכם על עוגה," אמר. "יש פה 31 תלמידים. אני אומר שלפחות שניים מכם נולדו באותו יום בשנה. לא באותה שנה, רק אותו יום וחודש."

הכיתה צחקה. "יש 365 ימים בשנה ורק 31 אנחנו," אמרה נגה. "אין סיכוי." עידו כבר חישב בקול: "31 חלקי 365, זה פחות מעשרה אחוזים. תתחיל לאפות."

המחליף ביקש מכל מי שמוכן לומר את היום והחודש שלו, ומי שלא רצה בחר תאריך אקראי. הם עברו אחד אחד. בתלמיד ה-14 נשמעה צעקה: "רגע, גם אני ב-3 במרץ!"

עידו לא ויתר. "זה מזל." המחליף חייך: "אולי. אבל תספור כמה זוגות יש בכיתה של 31. לא 31. כל תלמיד יכול להתאים לכל אחד מה-30 האחרים." עידו חישב: 465 זוגות.

"465 הזדמנויות לצירוף מקרים," אמר המחליף. "בכיתה כזאת הסיכוי שלי לנצח הוא בערך 73%. לא הימרתי. חישבתי." בסוף השיעור, הכיתה החליטה בכל זאת להביא עוגה. "לכבוד ה-3 במרץ," אמרה נגה.

שאלו: "איפה הטעות בחישוב של עידו (31 חלקי 365)?" (הוא בדק התאמה לתאריך אחד מסוים, ולא לכל הזוגות).

📊 ההסתברות שלפחות לשניים יש אותו יום הולדת

חישוב בהנחה של 365 ימים שווים בסיכוי (בלי 29 בפברואר). המספרים מעוגלים.

מספר אנשים	מספר זוגות	הסיכוי להתאמה
5	10	2.7%
10	45	11.7%
20	190	41.1%
23	253	50.7%
30	435	70.6%
40	780	89.1%
50	1,225	97.0%
70	2,415	99.9%

איך מחשבים: קל יותר לחשב את המשלים, "לכולם ימי הולדת שונים". השני שונה מהראשון בסיכוי 364/365, השלישי שונה משניהם בסיכוי 363/365, וכן הלאה. כופלים את כל השברים, ומחסירים מ-1.

🤔 למה זה חשוב?

האינטואיציה שלנו חושבת על "אני מול כל השאר", אבל השאלה היא על כל הזוגות, ומספר הזוגות גדל הרבה יותר מהר ממספר האנשים: 23 אנשים, 253 זוגות.

אותה טעות מופיעה בחיים: "איזה צירוף מקרים, זה לא יכול להיות מקרי!" לפעמים זה דווקא צפוי מאוד, כשיש הרבה הזדמנויות. חשוב לזכור את זה כשקוראים כותרת מפתיעה, כשמחליטים על סמך "תחושה", וכשמישהו מנסה לשכנע בעזרת סיפור אחד.

והכלי המתמטי: כשקשה לחשב "לפחות אחד", מחשבים "אף אחד" ומחסירים מ-1.

💬 שאלות לדיון

1. למה אנחנו מנחשים מספר כל כך גבוה?
2. מה ההבדל בין "מישהו בכיתה נולד ביום ההולדת שלי" לבין "לשניים בכיתה יש אותו יום הולדת"? איזה מהם סביר יותר? למה?
3. ההנחה "כל הימים שווים" לא מדויקת לגמרי. איך זה ישפיע, לדעתכם, על התוצאה?
4. תנו דוגמה מהחדשות או מהחיים ל"צירוף מקרים" שאולי אינו מפתיע כמו שנראה.

✅ בדיקה עצמית

שלוש שאלות קצרות:

1. כמה זוגות יש בקבוצה של 10 אנשים?
2. מה ההסתברות ששני אנשים נולדו בימים שונים? (שבר)
3. באיזה מספר אנשים הסיכוי להתאמה עובר את 50%?

תשובות: 45. 364/365. 23.

💡 טיפים מעשיים

- כשמשהו נראה "בלתי אפשרי", ספרו את ההזדמנויות: כמה זוגות, כמה ניסיונות, כמה אנשים.
- "לפחות אחד" מחשבים בעזרת המשלים: 1 פחות "אף אחד".
- בדקו את ההנחות של כל חישוב: מה הנחנו כדי שיהיה פשוט, ומה זה משנה.
- ניחוש זה בסדר, אבל רושמים אותו לפני שמחשבים, כדי לראות כמה האינטואיציה צדקה.

🎟️ כרטיס יציאה (3 דקות)

1. הסבירו במשפט אחד למה 23 אנשים מספיקים.
2. מה עדיף לחשב: "לפחות זוג אחד" או "אף זוג"? למה?

🏁 סיכום

"ראינו שהאינטואיציה טועה בגדול: לא צריך 183 אנשים, מספיקים 23. הסוד הוא לספור זוגות ולא אנשים, ולחשב דרך המשלים."

חוזרים לניחושים על הלוח מתחילת השיעור ומשווים לטבלה.

💡 הערות למורה המחליף

בניסוי בכיתה: יום וחודש בלבד, בלי שנה, בלי חובה, ומי שלא רוצה בוחר תאריך אקראי. לא רושמים שמות ליד תאריכים.

אם אין התאמה בניסוי, זה לא "כישלון": ב-30 תלמידים בערך בכיתה אחת מכל שלוש לא תהיה התאמה. זה בדיוק מה שאומר 70%.

השיעור מתאים גם ככיתה בלי מגמת מתמטיקה: את החישוב בטבלה אפשר להציג כנתון, ולהתמקד בספירת הזוגות ובדיון.

📝 בדף העבודה

פתק כניסה, ספירת זוגות, חישוב דרך המשלים, קריאת הטבלה, שאלות על הסיפור ואתגר חודשי לידה. כרטיס יציאה בתחתית. מחוון בעמוד השני.

מחוון למורה

מחוון: פרדוקס יום ההולדת

פתק כניסה: 1: ניחוש, כל תשובה. בהנחות הפשוטות התשובה היא כ-70.6%. 2: 6 זוגות.

1. 5: 10. 23: 253. 31: 465.
2. 364/365, כלומר כ-99.7%. ולכן הסיכוי ששניהם באותו יום: 1/365, כ-0.27%.
3. ג. 89.1%.
4. החישוב שלו בודק בערך את הסיכוי שמישהו נולד בתאריך אחד מסוים (כמו ההסתברות שתלמיד אחד יתאים ליום אחד). ההתערבות היא על כל זוג בכיתה: 465 זוגות, ולכן הסיכוי גבוה בהרבה.

5. לא. תוצאה אחת יכולה לצאת כך או אחרת. ההסתברות אומרת מה יקרה בערך ברוב הכיתות. בכיתה של 31 המחליף ינצח בערך ב-73 מכל 100 כיתות, ויפסיד בשאר.

6. 5 אנשים. ב-4: הסיכוי לחודשים שונים הוא 11880/20736, כ-57.3%, ולכן התאמה כ-42.7%. ב-5: חודשים שונים כ-38.2%, ולכן התאמה כ-61.8%, יותר מחצי.

כרטיס יציאה: 1: כי ב-23 אנשים יש 253 זוגות, וכל זוג הוא הזדמנות להתאמה. 2: "אף זוג" (המשלים), כי אותו כופלים בשלבים פשוטים, ואז מחסירים מ-1.